

Série A, N° 3949
N° d'ordre 4800

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

ALFRED **CHEVALIER**

PREMIÈRE THÈSE :

**CONTRIBUTION A LA DÉFINITION DES CHAMPS PHYSIQUES
EN THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS
ÉTUDE DU MODÈLE DE LEE**

DEUXIÈME THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le

16 NOV 1962

devant la Commission d'examen

M. de BROGLIE.....	Président
M ^{me} TONNELAT.....	} Examineurs
M. ARNOUS.....	
M. RIDEAU.....	Invité

Série A, N° 3949

N° d'ordre
4800

T H E S E S

présentées

A L A F A C U L T E D E S S C I E N C E S

D E L'U N I V E R S I T E D E P A R I S

pour obtenir

Le Grade de DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Alfred CHEVALIER

1ère THESE.- "Contribution à la définition des champs physiques
en théorie quantique des champs - Etude du modèle
de Lee " .

2ème THESE.- Propositions données par la Faculté .

Soutenue le

devant la Commission d'examen.

MM. de BROGLIE

Président

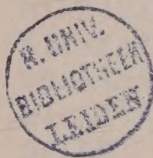
Mme TONNELAT

Examineurs .

MM. ARNOUS

RIDEAU

(Invité)



janvier 1962)

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- P R O F E S S E U R S -

Doyen M. ZAMANSKY .

LIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	PONCIN	T	Mécanique Générale
ROGLIE	T	Théories Physiques	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres
ANT	T	Anatomie et Histologie comparées	QUELET	T	Chimie organique
SE	T	Evolution des êtres organisés	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
OST	T	Chimie organique	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
DRON	T	Chimie appliquée	CUVILLIER	T	Micropaléontologie
T	T	Minéral. et Cristal.	JUNG	T	Pétrographie
SIER	T	Zoologie	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
ENOT	T	Biol. Vég.(Orsay)	WIEMANN	T	Chimie organ. et struc.
R	T	Phys.quant.et Relativité	JACQUINOT	T	Spectrosc. et Phys. Céleste (Orsay)
IER	T	Physiol. générale	VASSY	T	Phys. de l'Atmosphère
TEAU	T	Paléontologie	DESTOUCHES	T	Théories Physiques
RD	T	Physique (E.N.S.)	AMIEL	T	Chimie générale
AN	T	Mathématiques (E.N.S.)	HOCART	T	Minéral. et Cristallog.
ITTE	T	Chimie Générale	J.P.MATHIEU	T	Physique (Optique)
RD	T	Géométrie supérieure	COUTEAUX	T	Biol. animale (P.C.B.)
OMB	T	Physique du Globe	MAY	T	Zoologie (Orsay)
COUSIN	T	Biol.animale(SPCN)	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et To
TIEN	T	Chimie minérale	FELDMANN	T	Biol. Végét. marine
H	T	Zoologie	GUINIER	T	Phys. des Solides (Orsay)
LER	T	Physique (E.N.S.)	JOST	T	Physiol. comparée
USSI	T	Générique	FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique Mathématique
ERE	T	Géol.SPCN et sédim.	SCHWARTZ	T	Calc. diff. et Intégral
HERET	T	Biol. Vég. (P.C.B.)	CHOUARD	T	Physiol. Végétale
S R.	T	Recherches Physiques	MALAVARD	T	Aviation(Techn.Aéronaut.
AS A.	T	Biol. cellulaire	BRELOT	T	Calc. diff. et Intégral
LF	T	Optique appliquée	NORMANT	T	Synthèse organ. générale
ND	T	Physique Enseignement	BENARD	T	Chimie Minérale
ILLET	T	Physique (P.C.B.)	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
IER	T	Mécan.exp.des Fluides	DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
ON	T	Astronomie	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
T	T	Biologie maritime	ULRICH	T	Physiologie Végétale
EY	T	Météorol.et dynamique atmosphérique	MARECHAL	T	Optique théor. et Appl.
			KIRRMANN	T	Théories chimiques
IEN	T	Embryologie	CHADEFAUD	T	Botanique
HORN	T	Botanique	MleLE BRETON	T	Physiol. de la Nutrition
UGNAC	T	Biol. Végétale (SPCN)	SALEM	T	Math. Générales
CAUCHOIS	T	Chimie Physique	LELONG	T	Applic. de l'anal.à la géom
LIER	T	Physique du Globe	DEVILLERS	T	Anatom. et Histol. Comp.
RITIERT	T	Biol. Génér. (Orsay)	EHRESMANN	T	Topologie algébrique
ET	T	Radioélectricité(Orsay)	FRANCON	T	Physique (S.P.C.N.)
GEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique	Mle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
			CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des Groupes

EMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)	ARNOULT	T	Electronique (Orsay)
OT	T	Tech. Math. de la Phys.	CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
H	T	Géologie	DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
ATZMAN	T	Astrophysique	DENY	T	Math. Générales (Orsay)
NIER	T	Paléontol. stratig.	GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides
ANSKY	T	Mathématiques générales	LUCAS G.	T	Géologie
NUIER	T	Physique (M.G.P.)	ALLARD	T	Chimie Physique
ET	T	Générique (Orsay)	BERTHELOT	T	Phys. Fondam. Hautes Energies
THIER	T	Géol. appliquée	BRICART	T	Météor. et Phys. de l'Atm.
TONNELAT	T	Physique Théorique	Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysologie
MIER	T	Mathématiques (M.P.C.)	FRIEDEL	T	Phys. des solides
CHAY	T	Chimie Générale	M. JULIA	T	Etude des Molécules naturelles complexes
RAIN	T	Electrotechnique générale	LENDER	T	Biol. Anim. (SPCN) Orsay
BSSET	T	Chimie systématique	MAGAT	T	Physico-chimie des radiations
LEVY	T	Phys. Théor. Htes Energies Orsay	Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
CHAIX	T	Chimie biologique	MONOD	T	Chimie du Métabolisme
HUREL-			BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay)
PYPIAUX	T	Chimie (M.P.C.)	DE POSSEL	T	Analyse numérique
N	T	Mécan. Théor. des fluides	CHARLOT	T	Chimie analytique
ERER	T	Chimie biologique	HAISSINKY	T	Radiochimie
DUBREIL	T	Math. (Agrégation)	LEMBE	T	Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)	GUERIN	T	Chimie analytique
LAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)	CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.)
TE	T	Physique Electricité	JEAN	T	Phys. nucléaire (Orsay)
OIS J.E	T	Chimie organique	MATTLER	T	Phys. S.P.C.N.
OTTE	T	Zoologie (E.N.S.)	MICHEL L.	T	Phys. Théor. Htes Energies (Orsay)
HEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay)	BERGERARD	T	Zoologie (Orsay)
ER	T	Energétique générale	BERTEIN	T	Electronique (Orsay)
AULT	T	Electricité (Orsay)	BOUSSIÈRES		Chimie des Radioéléments (Orsay)
THIER	T	Mécanique appliquée	Mme COUTURE	T	Thermodynam. et Mécan. Ph.
CHEWITZ	T	Chimie Physique	ELLENBERGZE	T	Géol. appl. s/ le terr.
SSEL	T	Physique atomique	FRANC		Biol. Anim. (P.C.B.)
ER	T	Physiol. comparée	SCHNELL		Botan. tropicale (Orsay)
US	T	Physiol. vég. BMPV	STOLKOWSKI		Physiol. générale
TAING	T	Physique (Orsay)	ACHER		Chimie Biol. (Orsay)
IEN	T	Minéral. et Cristallog.	BAUDOIN		Biol. anim. P.C.B.
SE	T	Physiol. Vég. Orsay	BEAUMONT		Biol. anim. SPCN
ROT	T	Evol. des êtres organisés	BLAMONT	T	Géophysique Ionosphère
NETIER	T	Chimie générale Orsay	BOURREAU		Botanique
SOMPES	T	Zoologie	CURIE D.		Physique M.G.P.
LMANN	T	Chimie Théorique	DURAND-DELGA		Géologie
LLAC	T	Phys. Nucl. Radioactivité	FREON	T	Chimie organ. (Orsay)
NELAT	T	Biol. Physico-chim.	HELLER	T	Physiol. vég.
LE	T	Econométrie	TORTRAT	T	Calc. des Probabilités
LEMART	T	Chimie (P.C.B.)	CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
E	T	Chimie (Orsay)	MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
YMANN	T	Recherches Physiques	DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
NOCHET	T	Biol. Vég. SPCN (Orsay)			
LET	T	Chimie (P.C.B.)			

FOURCROY		Biol. végétale (SPCN)
CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méca.Céleste
VEIL		Physiologie générale
FF	T	Microbiologie
STRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérimentale
OMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
CHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay)
ANNES	T	Mécanique Générale
IEUR	T	Mathématiques MPC (Orsay)
ET	T	Mécanique générale (Orsay)
E		Géographie phys. et Géol. Dynamique
LET	T	Mécanique des Fluides
BOEUF		Physiologie animale
QUE		Physique de l'exosphère
NFLOT		Botanique II (Orsay)
LLON		Biologie animale P.C.B.
NIEN J.		Chimie P.C.B.
RANGE	T	Tech. Math. de la Phys.
IER		Antropologie
RAN	T	Botanique II (Orsay)
C-LAPIERRE	T	Physique ENS. (Orsay)
AUGEON	T	Botanique (Orsay)
NE	T	Mathématiques (Orsay)
EL	T	Mathématiques ENS féminine
GANOFF	T	Astronomie (Orsay)
Y	T	Mécanique céleste

STATAIRE GENERAL R. POUILLAIN .

A Monsieur LOUIS DE BROGLIE

A Madame M.A. TONNELAT

A Monsieur E. ARNOUS

Hommage de profonde gratitude

A Monsieur G. RIDEAU

En témoignage de ma vive reconnaissance .

A mes Parents

A ma femme

CONTRIBUTION A LA DEFINITION DES CHAMPS PHYSIQUES
EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS -

ETUDE DU MODELE DE LEE .

I N T R O D U C T I O N

L'étude de M. G. Rideau [6], [7] sur la diagonalisation de l'Hamiltonien de Wentzel et plus précisément les résultats "algébriques" obtenus ont été à l'origine de ce travail. Nous avons repris l'idée fondamentale qui est de construire des opérateurs de création et d'annihilation de particules physiques définis sur l'espace de Fock des particules libres. Ces opérateurs permettraient de donner à l'Hamiltonien total H la forme d'un Hamiltonien libre H_0 dans le cas où les spectres de H et de H_0 sont identiques, et seraient confondus avec les opérateurs création (annihilation) "ingoing" correspondants.

Nous avons choisi le modèle de Lee lorsque la constante de couplage λ est réelle; l'Hamiltonien étant non relativiste, nous avons cru bon, pour alléger les calculs, de nous placer dans le cas de l'approximation d'Heisenberg.

Nous avons d'abord supposé que les spectres de H et de H_0 sont identiques. Une condition nécessaire à l'existence des opérateurs définis plus haut est que l'on puisse construire des opérateurs création et annihilation de particules V , N , Θ qui permettent de donner à l'Hamiltonien total la forme d'un Hamiltonien libre. Pour ce faire, nous résolvons le système $UH_0 = HU$,

$U^\dagger U = I$, ce qui entraîne, dans le cas où nous nous sommes placés, $U U^\dagger = I$. Nous obtenons des opérateurs U définis sur l'espace de Fock des particules V, N, Θ libres.

Cette indétermination de U est conséquence de la continuité d'une partie du Spectre de H_0 . Mais comme tout opérateur U agissant sur le vecteur propre de l'Hamiltonien libre H_0 correspondant à une certaine valeur propre donne le vecteur propre de l'Hamiltonien total H correspondant à la même valeur propre, l'indétermination de l'opérateur U entraîne l'indétermination des vecteurs propres de H .

Du système $U H_0 = H U$, $U^\dagger U = U U^\dagger = I$, nous passons aux équations $U H_0 U^\dagger = H U U^\dagger = U U^\dagger H = m_V \Psi_V^* \Psi_V + m_N \Psi_N^* \Psi_N + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}$ où $\Psi_V^* = U \gamma_V^* U^\dagger$, $\Psi_N^* = U \gamma_N^* U^\dagger$, $A_{\vec{k}}^* = U a_{\vec{k}}^* U^\dagger$ et leurs adjoints vérifient les relations de commutation et d'anticommutation variables pour les champs libres. A cause de l'indétermination de U , l'Hamiltonien de Lee s'exprime dans des espaces de Fock de particules V, N, Θ différents, où il prend la forme :

$$H = m_V \Psi_V^* \Psi_V + m_N \Psi_N^* \Psi_N + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}.$$

Pour déterminer l'espace de Fock des particules physiques, nous calculons les opérateurs d'Heisenberg en fonction des opérateurs Ψ_V^* , Ψ_N^* , $A_{\vec{k}}^*$ et de leurs adjoints précédemment introduits.

En d'autres termes, les opérateurs d'Heisenberg se trouvent définis simultanément dans des espaces de Fock différents. Nous choisissons comme espace de Fock des particules physiques celui qui nous permettra d'obtenir les opérateurs "ingoing" "les plus favorables". Bien que la convergence faible et la convergence forte ne soient pas simultanées lors du passage à la limite $t \rightarrow -\infty$ opéré sur $e^{iHt} U e^{-iHt}$, nous vérifions bien que $a_{\vec{k}}^* \text{ in} = A_{\vec{k}}^*$, mais nous obtenons des résultats moins satisfai-

sants pour les opérateurs $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{N in}^*$ qui ne sont plus confondus avec les opérateurs création des particules physiques V , N . Ceci semble être dû aux relations d'anticommutation consécutives à l'approximation d'Heisenberg. (D'où l'intérêt d'appliquer cette méthode à un modèle relativiste.)

Nous donnons enfin les expressions des opérateurs "outgoing" dans "l'espace de Fock des particules physiques". A l'image de $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{N in}^*$ et de leurs adjoints, les opérateurs $\Psi_{V out}^*$, $\Psi_{N out}^*$ et leurs adjoints ne vérifient plus les relations d'anticommutation valables pour les champs libres. Mais on démontre que l'opérateur $e^{iHt} U^* e^{-iHt} A_{\vec{k}}^* e^{iHt} U e^{-iHt}$, expression de $e^{-i\omega_{\vec{k}}t} e^{iHt} a_{\vec{k}}^* e^{-iHt}$ dans l'espace de Fock des particules physiques, qui vérifie les relations de commutation habituelles en tout temps t fini et au temps $t = -\infty$, les vérifie également au temps $t = +\infty$; d'où les bonnes relations de commutation vérifiées par $a_{\vec{k} out}^*$ et ceci bien que la convergence faible et la convergence forte ne soient pas simultanées lors du passage à la limite $t \rightarrow +\infty$ opéré sur $e^{iHt} U e^{-iHt}$.

Ces résultats font l'objet des chapitres I et II -

Lorsque les spectres de H et de H_0 ne sont plus identiques, l'opérateur U satisfaisant $U H_0 = H U$, $U^* U = I$ est isométrique seulement. $U U^*$ est le projecteur final de U et ceci entraîne une modification des interprétations précédentes. On montre que $U U^*$ commute avec H et que $U H_0 U^*$ est l'expression de l'Hamiltonien total réduit au sous espace final de U . Les opérateurs $U a_{\vec{k}}^* U^*$, $U \Psi_V^* U^*$, $U \Psi_N^* U^*$ et leurs adjoints vérifient toujours les relations de commutation et d'anticommutation valables pour les champs libres, mais dans le sous-espace final de U .

Dans ces conditions est-il possible de construire des créateurs et annihilateurs de particules physiques définis sur l'espace de Fock des particules libres ? Pour cela nous introduisons les états discrets d'énergie $m_v + \sigma_n$, $\sigma_n < n.m_\theta$, de façon classique et nous montrons que l'équation $U_\Sigma H_0 = (H - \Sigma) U_\Sigma$ présentée par M. G. Rideau [6] admet des solutions partiellement isométriques suivant la manière dont est introduit, au cours de la résolution, l'état discret d'énergie $m_v + \sigma_i$ (Conditions initiales). Ces solutions partiellement isométriques ont même projecteur final, mais des projecteurs initiaux orthogonaux, et la somme des sous-espaces finaux correspondant aux énergies $(m_v + \sigma_i)$ $i = 1, 2 \dots$ et du sous-espace final de U nous donne l'espace de Fock des particules V, N, θ libres tout entier.

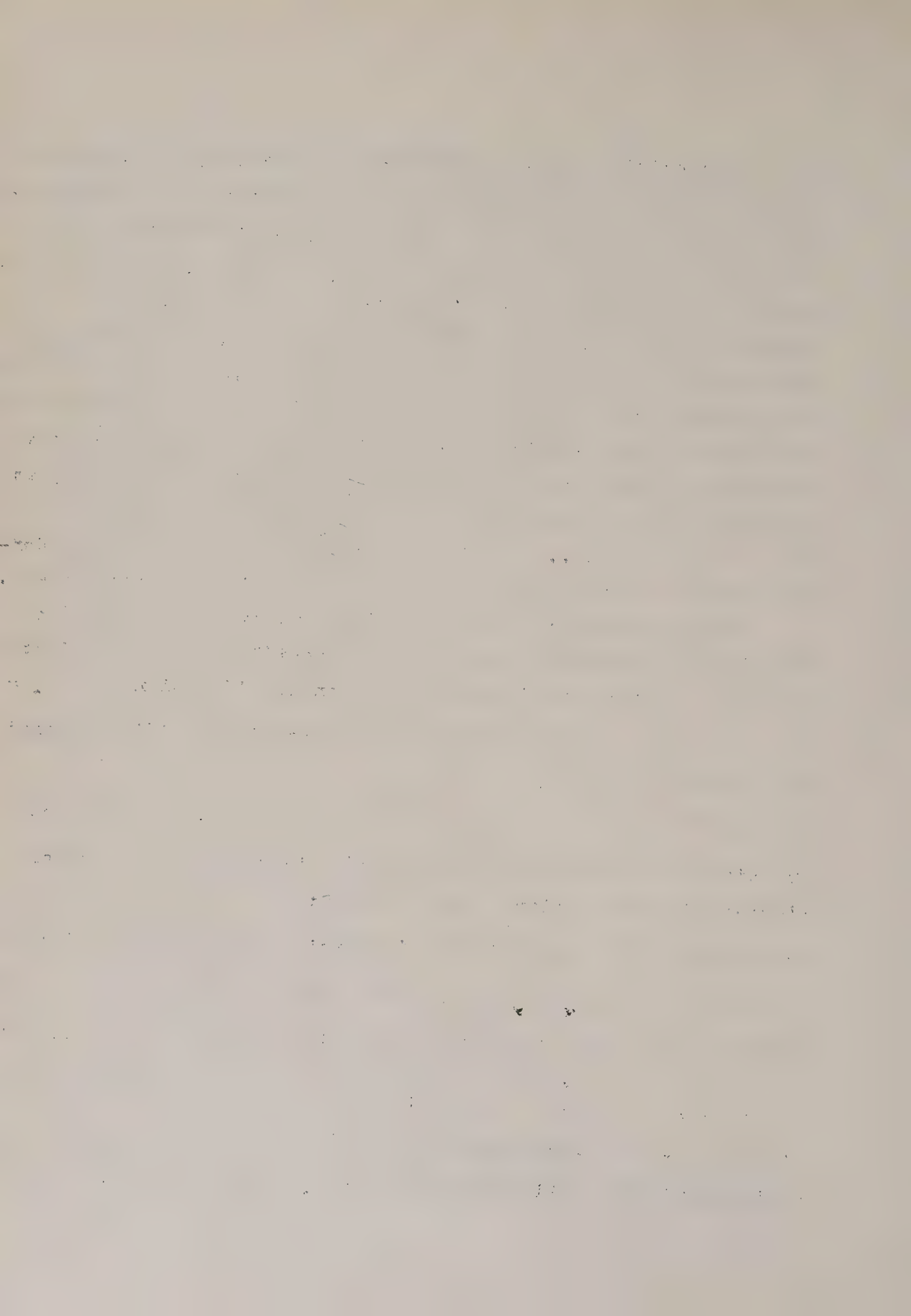
Pour exprimer les résultats indépendants de la solution choisie dans le sous espace final "associé" à la valeur discrète $m_v + \sigma_i$, nous utilisons la solution de l'équation $U_\Sigma H_0 = (H - \Sigma) U_\Sigma$ obtenue lorsque nous introduisons l'état discret de la façon suivante :

$U_\Sigma H_0 \psi_v^\pm |0\rangle = (H - \Sigma) U_\Sigma \psi_v^\pm |0\rangle$. Compte tenu du fait que la somme des sous espaces finaux doit nous donner l'espace de Fock entier, cette solution est $\Sigma = \sigma_i$ et U_{σ_i} est un opérateur partiellement isométrique de projecteur initial

$\psi_v^\pm \psi_v^\pm - \psi_v^\pm \psi_v^\pm \psi_v^\pm \psi_v^\pm$ - Dès lors l'expression de H réduit au sous espace "associé" à la valeur propre $(m_v + \sigma_i)$ est :

$$H U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\pm = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\pm H = (m_v + \sigma_i) U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\pm + \int d\vec{k} \omega_k U_{\sigma_i} a_k^* U_{\sigma_i}^* U_{\sigma_i} a_k U_{\sigma_i}^*$$

D'autre part les opérateurs $U_{\sigma_i} \psi_v^* U_{\sigma_i}^\pm$, $U_{\sigma_i} \psi_N^* U_{\sigma_i}^\pm \dots$ sont nuls. (Evidemment une partie du Spectre de H_0 étant continue, à l'ima-



ge de ce qui se passe dans la première partie, U_{σ_i} n'est pas défini de manière unique).

En conséquence s'il nous est impossible de construire des opérateurs Ψ_v^* , Ψ_N^* ayant de bonnes relations d'anticommutation dans tout l'espace, nous pouvons construire des opérateurs $A_{\vec{k}}^{\pm}$: $A_{\vec{k}}^{\pm} = U a_{\vec{k}}^{\pm} U^{\pm} + \sum_i U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^{\pm} U_{\sigma_i}^{\pm}$ vérifiant les relations de commutation :

$$[A_{\vec{k}}^{\pm}, A_{\vec{k}'}^{\pm}] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') ; [A_{\vec{k}}^{\pm}, U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*] = [A_{\vec{k}}^{\pm}, U U^*] = [A_{\vec{k}}^{\pm}, U \Psi_v^* U^*] = [A_{\vec{k}}^{\pm}, U \Psi_N^* U^*] = 0$$

et écrire

$$H = m_v U \Psi_v^* U^* U \Psi_v U^* + m_N U \Psi_N^* U^* U \Psi_N U^* + \sum_i (m_v + \sigma_i) U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}.$$

Nous avons pu calculer les opérateurs d'Heisenberg mais réduits aux sous espaces finaux des U_{σ_i} , puis les opérateurs $a_{\vec{k}}^{\pm}$ in, $a_{\vec{k}}^{\pm}$ out réduits à ces mêmes sous espaces. Nous obtenons

$U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in } U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = A_{\vec{k}}^{\pm} U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*$ (U_{σ_i} ayant toujours une certaine indétermination), relation nécessaire pour que $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in} = A_{\vec{k}}^{\pm}$. Il est à remarquer le rôle important que jouent les projecteurs finaux. Ces résultats sont exposés dans le chapitre III.

Dans le quatrième chapitre, nous traitons de la matrice S lorsque les spectres de H et de H_0 sont identiques.

Pour étudier le système $i \frac{d}{dt} U(t - \infty) = H(t) U(t - \infty)$, $U^*(t - \infty) U(t - \infty) = I$, $U(-\infty - \infty) = I$ dans l'espace de Fock des particules libres, il est nécessaire d'introduire un temps initial t_i , de résoudre le système

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_i) = H_I(t) U(t, t_i), \quad U^*(t, t_i) U(t, t_i) = I,$$

$U(t_i, t_i) = I$, puis de se définir $U(t, -\infty)$ comme limite $t_i \rightarrow -\infty$ $U(t, t_i)$. Mais il s'avère que la convergence faible et la convergence forte ne sont pas simultanées, et le premier système n'est résoluble que si nous introduisons une méthode adiabatique, ce que nous voulons éviter.

Dans ce but, nous cherchons une représentation physiquement acceptable de l'opérateur S dans "l'espace de Fock des particules physiques". En nous fondant sur les propriétés suivantes :

$$\psi_{V_{in}}^* |0\rangle = \psi_{V_{out}}^* |0\rangle, \quad \psi_{N_{in}}^* |0\rangle = \psi_{N_{out}}^* |0\rangle,$$

$$\psi_{V_{in}}^* \psi_{N_{in}}^* |0\rangle = \psi_{V_{out}}^* \psi_{N_{out}}^* |0\rangle, \quad [a_{\vec{k}_1, out}^*, a_{\vec{k}_2, out}^*]_- = 0,$$

$$[a_{\vec{k}, out}, a_{\vec{k}', out}^*]_- = \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

nous indiquons un moyen d'obtenir un opérateur S défini sur l'espace de Fock des particules physiques et acceptable quant au développement, à la symétrie, à la conservation des énergies, à l'unitarité.

Enfin il est intéressant de situer le problème vis à vis de la "Théorie des états stationnaires" développée par Van Hove [8] et des "méthodes axiomatiques" de Wightman [9] et de Haag [2].

Tous les résultats ont été obtenus sans que la résolution des équations intégrales résultant de l'utilisation du formalisme Hamiltonien ait été nécessaire. Il semble que cette méthode de calcul peut s'adapter à des modèles plus généraux.

Avant de développer ces résultats, je voudrais adresser, avec l'expression de mon profond respect, mes remerciements à Monsieur Louis de Broglie pour la bienveillance avec laquelle il m'a accueilli dans son Service de l'Institut Henri Poincaré. Je tiens à exprimer mes remerciements à Madame Tonnelat pour avoir bien voulu participer au Jury de cette thèse et à Monsieur le Professeur Arnous pour l'intérêt qu'il a montré pour ce travail et les encouragements qu'il m'a toujours donnés. Pour les nombreuses et fructueuses discussions qui m'ont permis de mener à bien ce travail, je remercie particulièrement Monsieur G. Rideau en qui j'ai trouvé à la fois un ami et un Directeur de Recherches.

C H A P I T R E I

Etude du système $U H_0 = H U$, $U^\dagger U = I$

1) Le modèle

Soient l'Hamiltonien de Lee

$$(1) H_1 = m_V \int d\vec{p} \psi_V^\dagger(\vec{p}) \psi_V(\vec{p}) + m_N \int d\vec{q} \psi_N^\dagger(\vec{q}) \psi_N(\vec{q}) + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \\ + \lambda \int d\vec{p} d\vec{q} d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \left[\psi_V^\dagger(\vec{p}) \psi_N(\vec{q}) a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger \psi_N^\dagger(\vec{q}) \psi_V(\vec{p}) \right]$$

et les règles de commutation et d'anticommutation suivantes

$$(2) [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger]_- = \delta(\vec{k} - \vec{k}') ; [\psi_V^\dagger(\vec{p}), \psi_V(\vec{p}')]_- = \delta(\vec{p} - \vec{p}') ; [\psi_N^\dagger(\vec{q}), \psi_N(\vec{q}')]_- = \delta(\vec{q} - \vec{q}')$$

tous les autres commutateurs et anticommutateurs étant nuls.

Si la constante de couplage λ est réelle (nous nous restreindrons à ce cas) cet Hamiltonien est symétrique; non relativiste, il met en interaction trois types de particules, V, N et θ , en négligeant les moments respectifs des particules V et N dans l'expression de leurs énergies; il ne permet que les transitions $V \rightarrow N + \theta$ et $N + \theta \rightarrow V$ entraînant une renormalisation de masse de la particule V. Si n_V, n_N, n_θ désignent respectivement les opérateurs nombre de particules V, N, θ , $n_1 = n_V + n_N$ et $n_2 = n_V + n_\theta$ sont des invariants, propriété permettant l'étude du modèle par secteurs (Pauli Källen 4, Heisenberg 3 Lee).

Nous allons nous placer dans le cas de l'approximation d'Heisenberg c'est à dire prendre l'Hamiltonien de Lee sous la forme

$$(3) H_2 = m_V \psi_V^\dagger \psi_V + m_N \psi_N^\dagger \psi_N + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[\psi_V^\dagger \psi_N a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger \psi_N^\dagger \psi_V \right] \\ + \delta m_V \psi_V^\dagger \psi_V$$

$$(4) \quad \delta m_V = \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \quad ; \quad \Delta m = m_N - m_V$$

avec les règles de commutation et d'anticommutation suivantes :

$$(5) \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^*]_- = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad ; \quad [\psi_V^*, \psi_V]_+ = [\psi_N^*, \psi_N]_+ = 1$$

tous les autres commutateurs et anticommutateurs étant nuls.

Les règles d'anticommutation entraînent $\psi_V^* \psi_V^* = \psi_N^* \psi_N^* = 0$ et restreignent le problème précédent aux seuls secteurs où n_V et n_N ne prennent que les valeurs 0 et 1. Le cas $n_1 = 0$ est trivial. Heisenberg s'est limité aux seuls secteurs $n_1 = 1$, n_2 quelconque, ce qui revient à considérer comme fixe en un point qui serait l'origine, la particule V ou la particule N

Dans l'étude qui va suivre, nous nous laisserons guider par les règles de commutation et d'anti commutation (5) qui n'excluent pas la présence simultanée d'un ψ_V^* et d'un ψ_N^* , et nous étudierons l'Hamiltonien

$$(6) \quad H = m_V \psi_V^* \psi_V + m_N \psi_N^* \psi_N + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} + \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2}\omega_{\vec{k}}} [\psi_V^* \psi_N a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^* \psi_N^* \psi_V] \\ + \delta m_V \psi_V^* \psi_V - \delta m_V \psi_V^* \psi_N^* \psi_N \psi_V$$

qui n'est autre que l'Hamiltonien (3) auquel nous avons ajouté le terme $-\delta m_V \psi_V^* \psi_N^* \psi_N \psi_V$ jouant en quelque sorte le rôle de renormalisation de masse de l'état $\psi_V^* \psi_N^* |0\rangle$ et dont la présence se justifie par l'étude qui suit

2) Etude du système

Nous allons étudier l'opérateur U défini sur l'espace de Fock des particules V, N, ϕ libres et vérifiant

$$(7) \quad U H_0 = H U \quad (8) \quad U^\dagger U = I \quad \text{où}$$

$$(9) \quad H_0 = m_V \psi_V^\dagger \psi_V + m_N \psi_N^\dagger \psi_N + \int d\vec{k} \, \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}.$$

Par suite de la relation (8), des règles de commutation et d'anticommutation (5) et des invariances de H , l'opérateur U aura nécessairement un développement de la forme

$$(10) \quad U = I + U_1 \psi_V^\dagger \psi_V + U_2 \psi_N^\dagger \psi_N + U_3 \psi_V^\dagger \psi_N + U_4 \psi_N^\dagger \psi_V + U_5 \psi_V^\dagger \psi_N^\dagger \psi_N \psi_V$$

où les opérateurs U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5 sont définis dans l'espace de Fock des particules Θ libres et sont respectivement représentés par des matrices dont les seuls éléments non nuls sont de la forme

$$(11) \quad \begin{aligned} &\langle \chi_1 \dots \chi_n | U_1 | \Lambda_1 \dots \Lambda_n \rangle, \quad \langle \chi_1 \dots \chi_n | U_2 | \Lambda_1 \dots \Lambda_n \rangle \\ &\langle \chi_1 \dots \chi_n | U_3 | \Lambda_1 \dots \Lambda_{n+1} \rangle, \quad \langle \chi_1 \dots \chi_n | U_4 | \Lambda_1 \dots \Lambda_{n-1} \rangle \\ &\langle \chi_1 \dots \chi_n | U_5 | \Lambda_1 \dots \Lambda_n \rangle \end{aligned}$$

où $|\Lambda_1 \dots \Lambda_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\Lambda_1}^* \dots a_{\Lambda_n}^* |0\rangle.$

Reprenons l'équation (7) en utilisant H, H_0 et U donnés respectivement par (6), (9) et (10); après identification dans les deux membres des coefficients de $\psi_V^\dagger \psi_V, \psi_N^\dagger \psi_V, \psi_N^\dagger \psi_N, \psi_V^\dagger \psi_N$ et $\psi_V^\dagger \psi_N^\dagger \psi_N \psi_V$, nous obtenons le système suivant :

$$(12) \quad \int d\vec{k} \, \omega_{\vec{k}} [V_1, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- = \delta m_V V_1 + \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^\dagger V_2$$

$$(13) \quad \int d\vec{k} \, \omega_{\vec{k}} [V_2, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- - \Delta m V_2 = \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^* V_1$$

$$(14) \quad \int d\vec{k} \, \omega_{\vec{k}} [N_2, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- = \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^* N_1$$

$$(15) \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} [N_1, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- + \Delta m N_1 = \Delta m_{\nu} N_1 + \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}} N_2$$

$$(16) \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} [U_5, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- = -\Delta m_{\nu} V_1 - \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}} V_2 - \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^* N_1$$

où nous avons posé

$$(17) \quad V_1 = 1 + U_1 \quad ; \quad V_2 = U_4, \quad N_1 = U_3 \quad ; \quad N_2 = 1 + U_2$$

auquel il faut adjoindre les conditions suivantes, conséquences de (8) :

$$(18) \quad V_1^* V_1 + V_2^* V_2 = 1 \quad ; \quad (19) \quad N_2^* V_2 + N_1^* V_1 = 0$$

$$(20) \quad N_1^* N_1 + N_2^* N_2 = 1 \quad ; \quad (21) \quad V_2^* N_2 + V_1^* N_1 = 0$$

$$(22) \quad U_5^* (N_2 + V_1 - 1) + (N_2^* + V_1^* - 1) U_5 + (N_2^* - 1)(V_1 - 1) + (V_1^* - 1)(N_2 - 1) \\ - N_1^* N_1 - V_2^* V_2 + U_5^* U_5 = 0$$

Il apparaît immédiatement en comparant (12), (14) et (16) que U_5 s'exprime très simplement à partir de V_1 et N_2 . En supposant que (18), (19), (20) et (21) sont vérifiés, la relation (22) entraîne

$U_5 = X - V_1 - N_2$, où X vérifie $X^* X = X + X^*$ (condition d'isométrie

et $\left[X, \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} \right]_- = 0$. Il s'ensuit que $X = 1 + X'$

où X' est isométrique et vérifie $\left[X', \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} \right]_- = 0$;

en particulier $X' = 1$ est un choix possible et dans ce cas

$$(23) \quad U_5 = 2 \cdot 1 - V_1 - N_2 .$$

Il reste donc à résoudre le système (12), (13), (14), (15) auquel on adjoint les conditions (18), (19), (20), (21). Les expressions matricielles de (12), (13), (14) et (15) sont respectivement:

$$(24) \left[\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - S_{m_v} \right] \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (n+1) \lambda^2 \int \frac{d\vec{\ell} f(\omega_{\vec{\ell}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\ell}}}} \phi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell})$$

$$(25) \left[\sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \Delta m \right] \phi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$$

$$(26) \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \frac{\lambda^2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

$$(27) \left[\sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_i} + \Delta m - S_{m_v} \right] \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) = n \int \frac{d\vec{\ell} f(\omega_{\vec{\ell}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\ell}}}} \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{\ell})$$

où nous avons posé

$$(28) \langle X_1, \dots, X_n | V_1 | \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \rangle = \sqrt{n!} \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

$$(29) \langle X_1, \dots, X_{n+1} | V_2 | \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \rangle = \sqrt{(n+1)!} \lambda \phi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$$

$$(30) \langle X_1, \dots, X_{n-1} | N_1 | \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \rangle = \sqrt{(n-1)!} \lambda \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$$

$$(31) \langle X_1, \dots, X_n | N_2 | \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \rangle = \sqrt{n!} \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

Nous obtenons des solutions du système (24), (25), (26), (27), satisfaisant aux conditions (18), (19), (20), (21) en opérant de la façon suivante. De l'équation (25) on tire

$$(32) \phi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \Delta m + i\epsilon} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$$

en reportant dans (24), il vient

$$(33) \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} + \Delta m) \left[\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\epsilon \right]} \right] \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \\ = \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{k}, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n)$$

et nous nous imposerons une solution de (33) de la forme

$$(34) \varphi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) + \varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) .$$

De la même façon soit

$$(35) \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) + \Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) ;$$

alors (26) nous donne

$$(36) \Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \frac{\lambda^2}{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n)$$

et en portant dans (27), il vient

$$(37) \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m \right] \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{k}} + i\epsilon} \right] \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) \\ = \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{k}} + i\epsilon} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_j}}} \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{k}, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_{n-1}) \\ + \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{(n-1)!} \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{k}) .$$

La vérification des relations (19) et (21) impose une dépendance des signes précédant $i\epsilon$ dans les équations (32) et (36) et

nous laisse deux possibilités de fixer ce choix. Ce choix fait, nous vérifions les conditions (18), (19), (20), (21) en utilisant le fait que la solution de (33) est définie à une constante multiplicative près, mais sans plus de précisions sur $\varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ que celles données par les équations (33) et (34) et sur $\Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1})$ que celles données par (37). [voir Appendice I]

Nous pouvons entre autre choisir pour $\varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ une solution de (33) ayant l'une des formes suivantes :

$$(38) \quad \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = C \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + \frac{\varphi''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\epsilon} \right]$$

$$(39) \quad \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = C \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + \frac{\varphi'''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - i\epsilon} \right]$$

où $\varphi''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ et $\varphi'''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ sont réguliers pour $\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} = \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i}$,

et indépendamment prendre pour $\Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1})$, une solution de (37) s'écrivant soit

$$(40) \quad \Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1}) = \frac{\Psi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1})}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m + i\epsilon}, \text{ soit}$$

$$(41) \quad \Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1}) = \frac{\Psi''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1})}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m - i\epsilon}, \text{ où}$$

$\Psi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1})$ et $\Psi''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1})$ sont réguliers pour $\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m = 0$.

Dans ces conditions, les relations (19), (20), (21) sont vérifiées, la relation (18) déterminant le facteur C (voir Appendice I), ce qui revient à remplacer (34) par

$$(42) \quad \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{d\vec{k}}{d\vec{\omega}} \right)^2 \frac{1}{(\vec{\omega}_k + \Delta m)^2}}} \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} \mathcal{P}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) + \varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \right]$$

quelles que soient les solutions envisagées.

Les calculs auxiliaires ont été faits pour le système de solutions proposé plus haut; nous pouvons évidemment changer simultanément le signe de $i\mathcal{E}$ dans les équations (32) et (36), et par suite dans (33) et (37), l'adaptation des calculs à ce nouveau cas étant immédiate.

3. Conclusion.

Nous pouvons ainsi obtenir des opérateurs U définis sur l'espace de Fock des particules V, N, θ libres et vérifiant $UH_0 = HU$ avec $U^\dagger U = I$. Ces résultats sont en effet établis en utilisant (32) et (36), mais sans préjuger de la forme de

$$\varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad , \text{ ni de celle de } \psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$$

comme on a pu se rendre compte au cours des calculs. Cette indétermination de U est conséquence du fait qu'une partie du spectre de H_0 est continue.

Mais comme tout opérateur U , agissant sur le vecteur propre de l'Hamiltonien libre H_0 correspondant à une certaine valeur propre, donne le vecteur propre de l'Hamiltonien total H correspondant à la même valeur propre, l'indétermination de l'opérateur U entraîne l'indétermination des vecteurs propres de H .

Chacun des opérateurs U se réduit évidemment à l'unité pour

$$\lambda = 0.$$

L'équation $UH_0 = HU$ avec la condition $U^\dagger U = I$ entraîne

$$(43) \quad UH_0 U^\dagger = H U U^\dagger, \quad U U^\dagger \text{ étant un projecteur. On peut démontrer par un calcul direct l'identité}$$

$$(44) \quad H U U^\dagger = U U^\dagger H$$

Il s'ensuit que $U U^*$ est un projecteur sur un sous espace $\mathcal{E}$ de l'espace de Fock des particules V, N, θ libres invariant par H . Il projette l'espace de Fock sur le sous espace $U \overline{\omega_k}, \overline{\omega_k}$ parcourant l'ensemble des vecteurs propres de H_0 . En particulier si le spectre de H est identique au spectre de H_0 (absence d'états discrets), $U U^* = I$.

Conséquence de (43) et (44), la relation $U(H_0 U^* - U^* H) = 0$ qui entraîne

$$(45) \quad H_0 U^* = U^* H ,$$

puisque le domaine initial de U est l'espace de Fock tout entier, que U soit unitaire ou isométrique seulement .

C H A P I T R E I I

Détermination de l'espace de Fock des particules physiques .

(cas sans état discret)

Dans la première partie de ce chapitre nous introduisons des opérateurs Ψ_V^* , Ψ_N^* , $A_{\vec{k}}^*$ et leurs adjoints, vérifiant les bonnes relations de commutation et d'anticommutation et qui permettent de donner à l'Hamiltonien total H la forme d'un Hamiltonien libre H_0 . Nous les appellerons opérateurs création et annihilation de particules V , N , Θ . Dans la deuxième partie nous calculons les opérateurs d'Heisenberg dans les différents espaces de Fock de particules V , N , Θ ; puis nous choisissons "l'espace de Fock des particules physiques" : c'est l'espace dans lequel les opérateurs "ingoing" définis par

$$(47) \quad \Psi_V^{\pm} \text{ in(out)} = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{-i m_V t} \Psi_V^*(t)$$

$$(48) \quad \Psi_N^{\pm} \text{ in(out)} = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{-i m_N t} \Psi_N^*(t)$$

$$(49) \quad a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in(out)} = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{-i \omega_{\vec{k}} t} a^{\pm}(\vec{k}, t)$$

(où $\Psi_V^*(t)$, $a^{\pm}(\vec{k}, t)$ sont les opérateurs d'Heisenberg)

sont donnés par les expressions "les plus favorables" en termes des opérateurs création et annihilation de particules V , N , Θ , que nous appellerons alors créateurs et annihilateurs des parti-

cules physiques. Nous avons écrit "les plus favorables" parce qu'il ne nous a pas été possible de réaliser l'idée initiale (voir début de l'introduction) qui était de faire coïncider les opérateurs création (annihilation) des particules physiques avec les opérateurs "ingoing" correspondants, et nous avons dû choisir comme espace de Fock des particules physiques, celui qui nous donne les relations les plus simples entre les opérateurs "ingoing" et les créateurs et annihilateurs de particules V, N, Θ . Enfin nous discutons des propriétés de la représentation des opérateurs "ingoing" et "outgoing" dans l'espace de Fock des particules physiques.

1. Les opérateurs création et annihilation de particules V, N, Θ .

Soit U l'une des solutions possibles du système $U H_0 = H U$, $U^* U = I$, H et H_0 étant donnés respectivement par (6) et (9). Puisque le spectre de H est identique au spectre de H_0 , U est unitaire et l'équation $U H_0 = H U$ entraîne

$$(50) \quad U H_0 U^* = H \quad . \text{ En écrivant }$$

$$U H_0 U^* = m_V U \gamma_V^* U^* U \gamma_V U^* + m_N U \gamma_N^* U^* U \gamma_N U^* + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} U a_{\vec{k}}^* U^* U a_{\vec{k}} U^*$$

nous faisons apparaître les opérateurs

$$(51) \quad \Psi_V^* = U \gamma_V^* U^* ; \Psi_N^* = U \gamma_N^* U^* , A_{\vec{k}}^* = U a_{\vec{k}}^* U^* \text{ et leurs ad-}$$

jointes qui satisfont aux règles de commutation et d'anticommutation

$$(52) \quad [\Psi_V^*, \Psi_V]_+ = I , [\Psi_N^*, \Psi_N]_+ = I , [A_{\vec{k}}^*, A_{\vec{k}'}^*]_- = \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

tous les autres commutateurs et anticommutateurs étant nuls. Ceci découle immédiatement des règles de commutation et d'anticommuta-

tion des opérateurs création et annihilation des particules V, N, Θ libres et de l'unitarité de U, et nous pouvons écrire

$$(53) \quad H = m_V \Psi_V^* \Psi_V + m_N \Psi_N^* \Psi_N + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} .$$

2. Opérateurs d'Heisenberg .

Dès lors nous sommes en mesure de calculer les opérateurs d'Heisenberg

$$(54) \quad \begin{aligned} \Psi_V^*(t) &= \exp[itH] \Psi_V^* \exp[-itH] \\ \Psi_N^*(t) &= \exp[itH] \Psi_N^* \exp[-itH] \\ a^*(\vec{k}, t) &= \exp[itH] a_{\vec{k}}^* \exp[-itH] \end{aligned} \quad \text{et leurs adjoints}$$

dans un espace de Fock de particules V, N, Θ .

Nous allons expliciter le calcul de $\Psi_V^*(t)$ en fonction des opérateurs création et annihilation de particules V, N, Θ . Nous calculons d'abord $U^\dagger \Psi_V^\dagger U$ en fonction des opérateurs création et annihilation des particules libres V, N, Θ . D'après (10) et (17), il vient

$$\begin{aligned} U^\dagger \Psi_V^\dagger U &= V_1^\dagger (a a^\dagger) \Psi_V^\dagger + N_1^\dagger (a a^\dagger) \Psi_N^\dagger + [N_2(aa^\dagger) - V_1^\dagger(aa^\dagger)] \Psi_V^\dagger \Psi_N^* \Psi_N \\ &+ [N_1^\dagger(aa^\dagger) + V_2(aa^\dagger)] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V . \end{aligned}$$

D'où il s'ensuit que

$$\begin{aligned} U U^\dagger \Psi_V^* U U^\dagger &= U V_1^*(aa^*) \Psi_V^* U^\dagger + U N_1^*(aa^*) \Psi_N^* U^\dagger + \\ &+ U [N_2(aa^*) - V_1^*(aa^*)] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N U^\dagger + U [N_1^*(aa^*) + V_2^*(aa^*)] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V U^\dagger . \end{aligned}$$

En utilisant l'unitarité de U et (49), il vient

$$(55) \quad \Psi_v^* = V_1^*(AA^*)\Psi_v^* + N_1^*(AA^*)\Psi_N^* + [N_2(AA^*) - V_1^*(AA^*)]\Psi_v^*\Psi_N^*\Psi_v \\ + [N_1^*(AA^*) + V_2(AA^*)]\Psi_v^*\Psi_N^*\Psi_v$$

et

$$(56) \quad \Psi_v^*(t) = e^{iHt} V_1^*(AA^*) e^{-iHt} e^{im_v t} \Psi_v^* + e^{iHt} N_1^*(AA^*) e^{-iHt} e^{im_N t} \Psi_N^* + \\ e^{iHt} [N_2(AA^*) - V_1^*(AA^*)] e^{-iHt} e^{im_v t} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_v + e^{iHt} [N_1^*(AA^*) + V_2(AA^*)] e^{-iHt} e^{im_N t} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_v$$

où

$$(57) \quad \langle 0 | A_{\vec{k}_1} \dots A_{\vec{k}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | e^{iHt} V_1^*(AA^*) e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = \sqrt{n!} \varphi_N^*(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n) e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t}$$

$$(58) \quad \langle 0 | A_{\vec{k}_1} \dots A_{\vec{k}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | e^{iHt} N_1^*(AA^*) e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n-1}}^* | 0 \rangle = \sqrt{(n-1)!} \lambda \Psi^*(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}) e^{i [\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j}] t}$$

$$(59) \quad \langle 0 | A_{\vec{k}_1} \dots A_{\vec{k}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | e^{iHt} N_2(AA^*) e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = \sqrt{n!} \gamma(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t}$$

$$(60) \quad \langle 0 | A_{\vec{k}_1} \dots A_{\vec{k}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | e^{iHt} V_2(AA^*) e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n-1}}^* | 0 \rangle = \sqrt{(n-1)!} \lambda \Phi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) e^{i [\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j}] t},$$

$$\varphi_N(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n), \Phi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n), \Psi(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}), \gamma(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n)$$

étant les solutions du système (24), (25), (26), (27) correspondant à la solution U choisie.

$$(61) \quad \Psi_N^*(t) = e^{iHt} N_2^*(AA^*) e^{-iHt} e^{im_N t} \Psi_N^* + e^{iHt} V_2^*(AA^*) e^{-iHt} e^{im_v t} \Psi_v^* + \\ e^{iHt} [N_2^*(AA^*) - V_1^*(AA^*)] e^{-iHt} e^{im_N t} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_v - e^{iHt} [V_2^*(AA^*) + N_1^*(AA^*)] e^{-iHt} e^{im_v t} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_v$$

$$\begin{aligned}
 (62) \quad \alpha^*(\vec{k}t) = & e^{iHt} A_{\vec{k}}^* e^{-iHt} + e^{iHt} [V_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_1(AA^*) + V_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_2(AA^*) - A_{\vec{k}}^*] e^{-iHt} \psi_V^* \psi_V \\
 & + e^{iHt} [N_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* N_1(AA^*) + N_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* N_2(AA^*) - A_{\vec{k}}^*] e^{-iHt} \psi_N^* \psi_N \\
 & + e^{iHt} [V_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* N_2(AA^*) + V_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* N_1(AA^*)] e^{-iHt} e^{-i\Delta mt} \psi_V^* \psi_N \\
 & + e^{iHt} [N_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_1(AA^*) + N_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_2(AA^*)] e^{-iHt} e^{i\Delta mt} \psi_N^* \psi_V \\
 & + e^{iHt} [2 A_{\vec{k}}^* - V_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_1(AA^*) - V_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_2(AA^*) \\
 & - N_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* N_1(AA^*) - N_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* N_2(AA^*)] e^{-iHt} \psi_V^* \psi_N^* \psi_N \psi_V
 \end{aligned}$$

3. Espace de Fock des particules physiques V, N, Θ .

Calcul de $a_{\vec{k} \text{ in(out)}}^{\pm}, \psi_{\text{in(out)}}^{\pm}, \psi_N^{\pm} \text{ in(out)}$.

Des calculs précédents, il résulte que les opérateurs incidents et émergents (47), (48), (49) s'expriment dans des espaces de Fock de particules V, N, Θ différents. Dans le but d'obtenir les opérateurs incidents les plus favorables (dans le sens indiqué au début de ce chapitre), nous devons nous placer dans "l'espace de Fock des particules physiques" V, N, Θ défini à partir de

$$(63) \quad \psi_V^* = U \psi_V^* U^*, \quad \psi_N^* = U \psi_N^* U^*, \quad A_{\vec{k}}^* = U a_{\vec{k}}^* U^* \quad \text{où}$$

$$(64) \quad U = I + (V_1 - I) \psi_V^* \psi_V + V_2 \psi_N^* \psi_V + N_1 \psi_V^* \psi_N + (N_2 - I) \psi_N^* \psi_N + (2I - V_1 - N_2) \psi_V^* \psi_N^* \psi_N \psi_V$$

les expressions matricielles de V_1 , V_2 , N_1 , N_2 (28), (29), (30), (31) vérifiant le système

$$(65) \quad \Phi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \Phi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_i \dots \vec{x}_{n+1})$$

$$(65) \quad \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \Phi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \\ = \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_j}}} \Phi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{j-1} \vec{k} \vec{x}_{j+1} \dots \vec{x}_n)$$

$$(67) \quad \left[\begin{aligned} &\Phi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = C \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) + \frac{\Phi''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \right] \\ &\text{où } \Phi''(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \text{ est régulier quand } \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} = \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} \\ &\text{avec } C = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} + \Delta m)^2}}} \end{aligned} \right]$$

$$(68) \quad \left[\begin{aligned} &\Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) + \Psi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \\ &\Psi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \frac{\lambda^2}{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_i \dots \vec{x}_n) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 (69) \quad & \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m \right] \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} \right] \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) \\
 & = \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} f(\omega_{\vec{x}_j})}{j! \sqrt{2\omega_{\vec{x}_j}}} \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{k}, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_{n-1}) \\
 & \quad + \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{k}, \vec{\lambda}_n)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 (70) \quad & \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) = \frac{\Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m + i\varepsilon} \\
 & \Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}) \text{ étant régulier quand } \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m = 0.
 \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons choisi le signe + précédant $i\varepsilon$ dans (65) et (68) et par conséquent dans (66) et (69) et que nous avons précisé la forme de $\Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ et de $\Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$ dans (67) et (70) respectivement.

Les résultats établis dans le paragraphe précédent restent valables, nous y avons précisé seulement (57), (58), (59), (60), conséquence du choix des opérateurs.

Nous allons expliciter le calcul de Ψ_{in}^* et Ψ_{out}^* (Les passages à la limite sont exposés dans l'Appendice II), donner les expres-

sions de $\Psi_{N in}^*$ et $\Psi_{N out}^*$ ainsi que celles de $a_{\vec{k}}^{\pm} in$ et $a_{\vec{k}}^{\pm} out$ et dans ce dernier cas, nous donnerons un aperçu de la méthode de calcul employée en passant explicitement à la limite ($t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$) sur l'un des opérateurs entrant dans l'expression de $e^{-i\omega_{\vec{k}} t} a^{\pm}(\vec{k}, t)$ (Appendice III).

a) Calcul de $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{V out}^*$.

En utilisant (47) et (56), mais en y précisant le choix de la solution, il vient

$$(71) \Psi_{V in(out)}^* = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} \left[e^{iHt} V_1^*(AA^*) e^{-iHt} \Psi_V^* + e^{i\Delta m t} e^{iHt} N_1^*(AA^*) e^{-iHt} \Psi_N^* + e^{iHt} [N_2(AA^*) - V_1(AA^*)] e^{-iHt} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V + e^{i\Delta m t} e^{iHt} [N_1^*(AA^*) + V_2(AA^*)] e^{-iHt} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V \right]$$

D'après (57), (58), (59), (60) où la solution est précisée, il apparaît que $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{V out}^*$ dépendent de

$$(72) \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} \varphi_n^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) \\ = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} c \left[\frac{1}{n!} \frac{1}{n!} P(\frac{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}{\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n}) + \frac{\varphi_n^{**}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - i\varepsilon} \right]$$

$$(73) \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i\Delta m t} e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j}] t} \sqrt{(n-1)!} \lambda \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1})$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] t} \sqrt{(n-1)!} \lambda \frac{\Psi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1})}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m - i\varepsilon}$$

sions de $\Psi_{N \text{ in}}^*$ et $\Psi_{N \text{ out}}^*$ ainsi que celles de $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in}$ et $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ out}$ et dans ce dernier cas, nous donnerons un aperçu de la méthode de calcul employée en passant explicitement à la limite ($t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$) sur l'un des opérateurs entrant dans l'expression de $e^{-i\omega_{\vec{k}}t} a^{\pm}(\vec{k}, t)$ (Appendice III) .

a) Calcul de $\Psi_{V \text{ in}}^*$, $\Psi_{V \text{ out}}^*$.

En utilisant (47) et (56), mais en y précisant le choix de la solution, il vient

$$(71) \Psi_{V \text{ in(out)}}^* = \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{(t \rightarrow +\infty)} \left[e^{iHt} V_1^*(AA^*) e^{-iHt} \Psi_V^* + e^{i\Delta m t} e^{iHt} N_1^*(AA^*) e^{-iHt} \Psi_N^* + e^{iHt} [N_2(AA^*) - V_1^*(AA^*)] e^{-iHt} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N + e^{i\Delta m t} e^{iHt} [N_1^*(AA^*) + V_2(AA^*)] e^{-iHt} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V \right]$$

D'après (57), (58), (59), (60) où la solution est précisée, il apparaît que $\Psi_{V \text{ in}}^*$, $\Psi_{V \text{ out}}^*$ dépendent de

$$(72) \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{(t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} \varphi_n^* (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{(t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} c \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\frac{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n}{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n}) + \frac{\varphi_n^{''*}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - i\varepsilon} \right]$$

$$(73) \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{(t \rightarrow +\infty)} e^{i\Delta m t} e^{i [\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j}] t} \sqrt{(n-1)!} \lambda \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1})$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{(t \rightarrow +\infty)} e^{i [\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] t} \sqrt{(n-1)!} \lambda \frac{\Psi'(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1})}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m - i\varepsilon}$$

sions de $\Psi_{N in}^*$ et $\Psi_{N out}^*$ ainsi que celles de $a_{\vec{k} in}^*$ et $a_{\vec{k} out}^*$ et dans ce dernier cas, nous donnerons un aperçu de la méthode de calcul employée en passant explicitement à la limite ($t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$) sur l'un des opérateurs entrant dans l'expression de $e^{-i\omega_{\vec{k}} t} a^{\pm}(\vec{k} t)$ (Appendice III).

a) Calcul de $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{V out}^*$.

En utilisant (47) et (56), mais en y précisant le choix de la solution, il vient

$$(71) \Psi_{V in(out)}^* = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} \left[e^{iHt} V_1^*(AA^*) e^{-iHt} \Psi_V^* + e^{i\Delta m t} e^{iHt} N_1^*(AA^*) e^{-iHt} \Psi_N^* + e^{iHt} [N_2(AA^*) - V_1^*(AA^*)] e^{-iHt} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N^* + e^{i\Delta m t} e^{iHt} [N_1^*(AA^*) + V_2(AA^*)] e^{-iHt} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V^* \right]$$

D'après (57), (58), (59), (60) où la solution est précisée, il apparaît que $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{V out}^*$ dépendent de

$$(72) \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} \Psi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} c \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\frac{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n}{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n}) + \frac{\Psi_N^{(n)*}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - i\varepsilon} \right]$$

$$(73) \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i\Delta m t} e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j}] t} \sqrt{(n-1)!} \lambda \Psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1})$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] t} \sqrt{(n-1)!} \lambda \frac{\Psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1})}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m - i\varepsilon}$$

$$(74) \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i}) t} \sqrt{n!} \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n) = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i}) t} X$$

$$\left[\frac{1}{n!} P\left(\frac{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n}{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n}\right) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i}) + i\varepsilon} \frac{\sum_{i=1}^n f(\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i})}{\sum_{j=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j}) - (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m) + i\varepsilon} \Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n) \right]$$

$$(75) \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i \Delta m t} e^{i [\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j}] t} \sqrt{n!} \lambda \Phi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n) =$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} e^{i [\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] t} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda}{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i}}} X$$

$$X \left[\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{1}{(n-1)!} P\left(\frac{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}}{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}}\right) + \frac{\Psi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\lambda}_n)}{\sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} + \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} + i\varepsilon} \right]$$

Le passage à la limite $t \rightarrow -\infty$ sur les seconds membres de (72), (73), (75) est exposé dans l'Appendice II. Le même passage à la limite sur le second membre de (74) est obtenu en répétant la méthode employée pour (75). Le passage à la limite $t \rightarrow +\infty$ sera alors immédiat pour (72) et (73), il le sera également pour (74) et (75) si l'on remarque que :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} \frac{e^{i(\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m) t}}{(\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m)} = \lim_{t \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)} (i) \int_{-\infty}^t du e^{i[\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m] u} = 0$$

Il vient alors

$$(76) \Psi_{v in}^* = c \Psi_v^* + (1-c) \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N$$

$$(77) \Psi_{v out}^* = O^1(AA^*) \Psi_v^* + O^2(AA^*) \Psi_N^* + O^3(AA^*) \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N + O^4(AA^*) \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N^* \Psi_N$$

$$(78) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | O^1 \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = \frac{c}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + c \sqrt{n!} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) 2i\pi \delta \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i})$$

$$(79) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | O^2 \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n-1}}^* | 0 \rangle = \sqrt{(n-1)!} \lambda \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}) 2i\pi \delta [\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m]$$

$$(80) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | O^3 \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = \frac{1}{n!} [1-c] P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) - \left[c \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + \frac{\lambda^2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \frac{\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)}{(\omega_{\vec{x}_i} + \Delta m)} \right] 2i\pi \delta \sum (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i})$$

$$(81) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | O^4 \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n-1}}^* | 0 \rangle = 2i\pi \delta [\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] \times$$

$$\lambda^2 \left[\sqrt{(n-1)!} \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}) - \frac{c \sqrt{n!}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \frac{\varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_i \dots \vec{x}_i)}{\omega_{\vec{x}_i} + \Delta m} \right]$$

(b) Les mêmes passages à la limite apparaissent lors du calcul de $\Psi_{N \text{ in}}^*$ et $\Psi_{N \text{ out}}^*$; il vient

$$(82) \Psi_{N \text{ in}}^* = \Psi_N^* + (1-c) \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V$$

$$(83) \Psi_{N \text{ out}}^* = P^1(AA^*) \Psi_N^* + P^2(AA^*) \Psi_V^* + P^3(AA^*) \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V + P^4(AA^*) \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V$$

$$(84) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | P^1 \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + 2i\pi \delta \sum (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) \frac{\lambda^2 \sqrt{n!}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} \frac{\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_i \dots \vec{\lambda}_n)}{\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m}$$

$$(85) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | P_1^2 \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n+1}}^* | 0 \rangle = 2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m \right] \times$$

$$\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)!} \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} c \frac{\varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+1})}{\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m}$$

$$(86) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | P_1^3 \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = (1-c) \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) + 2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\lambda^2 \sqrt{n!}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} \frac{\psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_i \dots \vec{\lambda}_n)}{\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m} - c \sqrt{n!} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \right]$$

$$(87) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | P_1^4 \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n+1}}^* | 0 \rangle = -2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m \right] \times$$

$$\times \lambda \left[\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)!} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} c \frac{\varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+1})}{\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m} + \sqrt{n!} \psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \right]$$

(c) Enfin on trouve

$$(88) \quad a_{\vec{k}}^{\text{in}} = A \frac{\vec{x}}{\vec{k}}$$

$$(89) \quad a_{\vec{k}}^{\text{out}} = A_{\vec{k}}^* + R^1(AA^*) \psi_N^* \psi_V + R^2(AA^*) \psi_N^* \psi_V + R^3(AA^*) \psi_V^* \psi_N$$

$$+ R^4(AA^*) \psi_N^* \psi_V + R^5(AA^*) \psi_V^* \psi_N^* \psi_N \psi_V$$

$$(90) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | R^1 \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n+1}}^* | 0 \rangle = \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} 2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} \right] \times$$

$$\lambda^2 n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi_N^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \phi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$$

$$(91) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | R^2 \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n+1}}^* | 0 \rangle = \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} 2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} \right] \times$$

$$\lambda^2 (n+1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) \psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1})$$

$$(92) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | R^3 | \frac{1}{\sqrt{n!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_n}^* | 0 \rangle = \frac{k(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} 2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) \right] \times$$

$$\lambda n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi_n^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$$

$$(93) \langle 0 | A_{\vec{x}_1} \dots A_{\vec{x}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} | R^4 | \frac{1}{\sqrt{(n-2)!}} A_{\vec{\lambda}_1}^* \dots A_{\vec{\lambda}_{n-2}}^* | 0 \rangle = \frac{k(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} 2i\pi \delta \left[\Delta m - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-2} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} \right] \times$$

$$\lambda^3 (n-1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n-1} \psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}) \phi_n(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-2}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1})$$

$$(94) R^5(AA^*) = -[R^1(AA^*) + R^2(AA^*)]$$

Ces derniers résultats ont été obtenus en partant de (49) et (62) par des passages à la limite $t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$; sur des opérateurs de type $e^{-i\omega_{\vec{k}}t}$, $e^{iHt}[V_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_1(AA^*) + V_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_2(AA^*) - A_{\vec{k}}^*] e^{-iHt}$, coefficient de $\psi_V^* \psi_V$ dans l'expression de $e^{-i\omega_{\vec{k}}t} a^*(\vec{k}t)$.

Ce calcul est exposé dans l'appendice III.

4) Discussion des résultats

a) Les opérateurs "ingoing"

Il s'avère que pour conduire le calcul de $a_{\vec{k}}^{\pm}$ in, il n'était pas nécessaire de préciser, comme nous l'avons fait la forme de $\varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$, ni celle de $\psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1})$. Ce calcul est donc valable pour toute solution U du système $UH_0 = H U$, $U^{\pm} U = I$ définie par les équations (32) à (37) où (34) est remplacé par (42). En d'autres termes les expressions de $a_{\vec{k}}^{\pm}$ in (et $a_{\vec{k}}^{\pm}$ out) sont données par l'ensemble des équations [(88) à (94)] où l'on ne préjuge pas de la forme de $\varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$ et de $\psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1})$. Le

choix que nous nous sommes imposé plus haut est nécessaire pour obtenir les définitions "les plus favorables" de $\Psi_{V in}^*$ et $\Psi_{N in}^*$ [(76) et (82)] .

Il est remarquable que, la convergence faible seule ayant lieu dans notre problème, les résultats obtenus pour $a_{\vec{k} in}^{\pm}$ soient satisfaisants: $a_{\vec{k} in}^{\pm} = A_{\vec{k}}^{\pm}$, et l'opérateur création d'une particule physique Θ est confondu avec l'opérateur création "ingoing" correspondant. Voici ce qui semble en être la raison principale. Dans "l'espace de Fock des particules physiques", les expressions de

$e^{-i\omega_{\vec{k}} t} e^{iHt} a_{\vec{k}}^{\pm}$ et de $e^{-im_v t} e^{iHt} \Psi_V^{\pm}$ sont respectivement :

$$e^{iHt} U^{\pm} e^{-iHt} A_{\vec{k}}^{\pm} e^{iHt} U e^{-iHt} \text{ et } e^{iHt} U^{\pm} e^{-iHt} \Psi_V^{\pm} \times$$

$e^{iHt} U e^{-iHt}$, l'opérateur $e^{iHt} U e^{-iHt}$ étant représenté dans l'espace de Fock des particules physiques V, N, Θ par une matrice identique à celle qui représente l'opérateur $e^{-iH_0 t} U e^{-iH_0 t}$ dans l'espace de Fock des particules libres V, N, Θ où U est donné par [(64) à (70)] . Il s'ensuit que $e^{iHt} U e^{-iHt}$ converge faiblement lorsque $t \rightarrow -\infty$, sans conserver la norme (voir chapitre IV). Mais la limite d'un produit n'étant pas égale au produit des limites, il n'est pas exclu que les passages à la limite $t \rightarrow -\infty$ sur les opérateurs

$e^{iHt} U^{\pm} e^{-iHt} A_{\vec{k}}^{\pm}$ et $e^{iHt} U^{\pm} e^{iHt} \Psi_V^{\pm} e^{iHt} U e^{-iHt}$ donnent des résultats satisfaisants. C'est ce qui se passe pour le premier de ces opérateurs qui à la limite $t = -\infty$ donne $A_{\vec{k}}^{\pm}$. C'est parce que $A_{\vec{k}}^{\pm}$ vérifie les relations de commutation habituelles que nous trouvons dans le développement de

$$e^{iHt} U^{\pm} e^{-iHt} A_{\vec{k}}^{\pm} e^{iHt} U e^{-iHt} \text{ des termes de la forme}$$

$e^{iHt} U^{\pm} e^{-iHt} A_{\vec{k}}^{\pm} e^{iHt} U e^{-iHt}$

$$e^{-i\omega \vec{k} t} e^{iHt} [V_1^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_1(AA^*) + V_2^*(AA^*) A_{\vec{k}}^* V_2(AA^*) - A_{\vec{k}}^*] e^{-iHt} \psi_v^* \psi_v$$

(voir (62)) qui s'annulent pour $t = -\infty$, d'où $a_{\vec{k}}^* \text{ in} = A_{\vec{k}}^*$.

Par contre l'opérateur $e^{iHt} U^* e^{-iHt} \psi_v^* \chi$

$e^{iHt} U e^{-iHt}$, parce que ψ_v^* vérifie les relations

$$[\psi_v^*, \psi_v]_+ = I, \quad \psi_v^* \psi_v^* = 0$$

consécutives à l'approximation d'Heisenberg, ne renferme que des termes de la forme $e^{iHt} V^* (A A^*) e^{-iHt}$, ce qui fait que nous retrouvons ici la convergence faible sans conservation de la norme (voir (76)). Autrement dit, le produit $e^{iHt} U^* \chi e^{-iHt} \psi_v^* e^{iHt} U e^{-iHt}$ ne se traduit plus dans son développement par des produits analogues à ceux qui apparaissent dans le développement de $e^{iHt} U^* e^{-iHt} A_{\vec{k}}^* e^{iHt} U e^{-iHt}$ et nous perdons toute chance d'obtenir un bon comportement au temps $t = -\infty$, d'où l'expression de $\psi_v^* \text{ in}$. Les mêmes constatations sont valables pour $\psi_{N \text{ in}}^*$.

Il serait intéressant d'appliquer la méthode à un modèle relativiste d'où de telles particularités sont exclues afin de vérifier si les opérateurs création "des particules physiques" sont confondus avec les opérateurs création "ingoing" correspondants.

5) Les opérateurs "outgoing".

Les expressions de ces opérateurs dans "l'espace de Fock des particules physiques" sont données par [(77) à (81)] ; [(83) à (87)] ; [(89) à (94)] . A l'image de $\psi_v^* \text{ in}$ et

γ_{Nin}^* , les opérateurs γ_{Vout}^* , γ_{Nout}^* ne vérifient plus les relations d'anticommutation valables pour les champs libres.

En vue d'établir les relations

$$[a_{\vec{k}out}, a_{\vec{k}'out}^*]_- = \delta(\vec{k}\vec{k}') \quad , \quad [a_{\vec{k}out}^*, a_{\vec{k}'out}^*]_- = 0$$

et afin de ne pas alourdir les notations, nous remarquons d'abord que l'opérateur $e^{iHt} U^\dagger e^{-iHt} A_{\vec{k}}^\dagger e^{iHt} U e^{-iHt}$ est représenté dans "l'espace de Fock des particules physiques" par une matrice identique à celle qui représente l'opérateur $e^{iH_0 t} U^\dagger e^{-iH_0 t} A_{\vec{k}}^\dagger e^{iH_0 t} U e^{-iH_0 t}$ dans l'espace de Fock des particules libres,

U étant donné par [(64) à (70)] , et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iH_0 t} U^\dagger e^{-iH_0 t} A_{\vec{k}}^\dagger e^{iH_0 t} U e^{-iH_0 t} = A_{\vec{k}}^\dagger$.

Posons le problème :

Peut-on attendre de l'opérateur $e^{iH_0 t} U^\dagger e^{-iH_0 t} A_{\vec{k}}^\dagger e^{iH_0 t} U e^{-iH_0 t}$ qui, en tout temps t fini, vérifie les bonnes relations de commutation ainsi qu'au temps $t = -\infty$, qu'il vérifie toujours ces relations de commutation au temps $t = +\infty$.

Pour répondre à cette question, nous emploierons le détour suivant.

Soient le système (a) $U H_0 = H U$, $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ (U étant donné par [(64) à (70)]) et les systèmes qui lui sont liés :

$$(b) \quad H_0 U^\dagger = U^\dagger H$$

$$(c) \quad H_0 U^T = U^T H , \quad U^T U^{T\dagger} = U^{T\dagger} U^T = I$$

et soit V l'opérateur unitaire défini par

$$(d) \quad U^T = V U^\dagger ; \quad V^\dagger U^T = U^\dagger$$

De (b), (c), (d) nous tirons: $[H_0 V - V H_0] U^\# = 0$ qui entraîne $[H_0, V]_- = 0$, puisque le domaine final de $U^\#$ est l'espace de Fock des particules libres tout entier. Tenant compte de cette relation et de (d), il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-it\omega_{\vec{k}}} e^{iH_0 t} U^\# a_{\vec{k}}^\# U e^{-iH_0 t} \\ = \lim_{t \rightarrow +\infty} V^\# \left[e^{-it\omega_{\vec{k}}} e^{iH_0 t} U^T a_{\vec{k}}^\# \bar{U} e^{-iH_0 t} \right] V$$

qui devient, si l'on pose $t' = -t$

$$= \lim_{t' \rightarrow -\infty} V^\# \left[e^{it'\omega_{\vec{k}}} e^{-iH_0 t'} U^T a_{\vec{k}}^\# U^\#{}^T e^{iH_0 t'} \right] V \\ = \lim_{t' \rightarrow -\infty} V^\# \left[e^{it'\omega_{\vec{k}}} e^{iH_0 t'} U^\# a_{\vec{k}}^\# U e^{-iH_0 t'} \right]^T V \\ = V^\# a_{\vec{k}}^\#{}^T V = V^\# a_{\vec{k}}^\# V \quad \text{d'après } (\propto)$$

résultat qui nous assure que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-it\omega_{\vec{k}}} e^{iH_0 t} U^\# a_{\vec{k}}^\# U e^{-iH_0 t}$

vérifie encore les bonnes relations de commutation.

Nous pouvons ainsi conclure que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iHt} U^\# e^{-iHt} a_{\vec{k}}^\# e^{iHt} U e^{-iHt}$,

expression de $a_{\vec{k}}^\#$ out dans l'espace de Fock des particules physiques, conserve les relations de commutation valables pour les champs libres.

$\propto$) Nous avons désigné par U^T et $\bar{U}$ l'opérateur transposé et l'opérateur conjugué de l'opérateur U et nous avons utilisé la remarque suivante : l'expression de $a_{\vec{k}}^\#{}^T$ dans l'espace de Fock des particules libres $\odot$ est identique à celle de $a_{\vec{k}}^\#$.

C H A P I T R E I I I

Les opérateurs création et annihilation des particules physiques (cas avec états discrets).

Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons supposer que les spectres de H_0 et de H ne sont plus identiques. L'opérateur U choisi précédemment pour vérifier $U H_0 = H U$ et $U^\dagger U = I$ est alors seulement isométrique et permet de définir des opérateurs $U \psi_V^* U^\dagger$, $U \psi_N^* U^\dagger$, $U a_{\vec{k}}^* U^\dagger$ et leurs adjoints ayant de bonnes relations de commutation et d'anticommutation dans le sous-espace défini par le projecteur $U U^\dagger$. De plus d'après (9), (43), (44) :

$$(95) \quad U U^\dagger H = H U U^\dagger = m_V U \psi_V^* U^\dagger U \psi_V U^\dagger + m_N U \psi_N^* U^\dagger U \psi_N U^\dagger + (d\vec{k} \omega_{\vec{k}} U a_{\vec{k}}^* U^\dagger U a_{\vec{k}} U^\dagger)$$

Les équations (76) et (77) sont valables sous les conditions suivantes :

a) modifier les premiers membres en les remplaçant par $U U^\dagger \psi_{V \text{ in}}^* U U^\dagger$
 $U U^\dagger \psi_{V \text{ out}}^* U U^\dagger$

b) les opérateurs ψ_V^* , ψ_N^* , $A_{\vec{k}}^*$ et leurs adjoints intervenant dans les seconds membres désignent les opérateurs $U \psi_V^* U^\dagger$, $U \psi_N^* U^\dagger$... qui sont nuls à l'extérieur du sous espace défini par $U U^\dagger$.

Mêmes remarques au sujet de (82), (83) et (88), (89).

Pour poursuivre notre étude, nous allons supposer que la valeur de λ est telle qu'il s'introduit des états discrets d'énergie $(m_V + \sigma_i)$ et de vecteur propre normé :

$$\int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_i \varphi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_i) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_i}^* \Psi_v^* |0\rangle + \lambda \int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_{i+1} \Phi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{i+1}) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_{i+1}}^* \Psi_N^* |0\rangle$$

vérifiant l'équation :

$$(96) \quad [m_v + \sigma_i] \left[\int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_i \varphi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_i) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_i}^* \Psi_v^* |0\rangle + \lambda \int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_{i+1} \Phi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{i+1}) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_{i+1}}^* \Psi_N^* |0\rangle \right] \\ = H \left[\int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_i \varphi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_i) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_i}^* \Psi_v^* |0\rangle + \lambda \int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_{i+1} \Phi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{i+1}) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_{i+1}}^* \Psi_N^* |0\rangle \right]$$

qui se traduit par le système

$$(97) \quad \left[\sigma_i - \sum_{j=1}^i \omega_{\vec{k}_j} \right] \left[1 - \lambda^2 \frac{d\vec{l} f(\omega_{\vec{l}})}{2\omega_{\vec{l}} (\omega_{\vec{l}} + \Delta m)} \frac{1}{\sigma_i - \sum_{j=1}^i \omega_{\vec{k}_j} - (\omega_{\vec{l}} + \Delta m)} \right] \varphi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_i) = \\ = \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{f(\omega_{\vec{l}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}}}} \frac{1}{\sigma_i - \sum_{j=1}^i \omega_{\vec{k}_j} - (\omega_{\vec{l}} + \Delta m)} \sum_{j=1}^i \frac{f(\omega_{\vec{k}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_j}}} \varphi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{j-1} \vec{k}_{j+1} \dots \vec{k}_i)$$

$$(98) \quad \Phi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{i+1}) = \frac{1}{(i+1)} \frac{1}{\sigma_i - \sum_{j=1}^{i+1} \omega_{\vec{k}_j} - \Delta m} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{f(\omega_{\vec{k}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_j}}} \varphi(\sigma_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_j \dots \vec{k}_{i+1})$$

où $\sigma_i < i \cdot m_0$ (i , entier > 0) dans le cas le plus général.
Ce système n'est autre que le système homogène associé à (32),
(33).

Dans ces conditions, pour tout état discret d'énergie $(m_v + \sigma_i)$, nous allons montrer que l'équation $U_\sigma H_0 = (H - \sigma) U_\sigma$ proposée par M. G. Rideau dans son étude "Un modèle résoluble en théorie quantique des champs: le modèle de Wentzel" [6], admet des solutions partiellement isométriques de sous espaces initiaux orthogonaux mais ayant même sous espace final, chacune de ces solu-

tions dépendant de la façon dont est introduit l'état discret, la somme des sous espaces finaux et du sous espace défini par $U U^*$ nous donnant l'espace entier.

1 Etude d'un système (cas $i = 1$).

Dans une première étape, nous allons expliciter la construction de U_σ vérifiant

$$(99) \quad U H_0 = (H - \sigma) U_\sigma$$

$$(100) \quad U_\sigma H_0 \Psi_V^* |0\rangle = (H - \sigma) U_\sigma \Psi_V^* |0\rangle \quad \text{nous donnant l'état discret (96) cas } i = 1$$

$$(101) \quad U_\sigma^* U_\sigma = \text{Projecteur}$$

$$(102) \quad U_\sigma U_\sigma^* U U^* = 0, \quad U_\sigma U_\sigma^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = 0 \quad i \neq 1$$

U_{σ_i} étant calculé ultérieurement,

puis nous donnerons la solution de ce système lorsque l'équation (100) nous donne l'état discret (96) dans le cas général. La méthode de calcul est exposée dans l'appendice IV pour établir la relation $U_{\sigma_i}^* U_{\sigma_i} = \text{Projecteur}$. Nous étudierons ensuite les autres systèmes obtenus en changeant l'équation (100) (conditions initiales).

Pour résoudre le système (99), (100), (101), (102), nous proposons la solution :

$$(103) \quad \sigma = \sigma_1$$

$$(104) \quad U_{\sigma_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vec{d}_{l_1} \dots \vec{d}_{l_{n-1}} \vec{d}_{k_1} \dots \vec{d}_{k_n} \varphi(\vec{\sigma}_1, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_n}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_{n-1}} \Psi_V^* \Psi_V \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vec{d}_{l_1} \dots \vec{d}_{l_{n-1}} \vec{d}_{k_1} \dots \vec{d}_{k_{n+1}} \lambda \Phi(\vec{\sigma}_1, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{n+1}) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_{n+1}}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_{n-1}} \Psi_N^* \Psi_V \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vec{d}_{l_1} \dots \vec{d}_{l_{n-1}} \vec{d}_{k_1} \dots \vec{d}_{k_n} \varphi(\vec{\sigma}_1, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_n}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_{n-1}} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N^* \Psi_V \right) \right)$$

où $\varphi(\sigma_1, \vec{k})$ et $\Phi(\sigma_1, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$ sont donnés par (97), (98) (cas $i = 1$). Un tel choix est nécessaire si nous voulons que (100) nous donne l'état discret (96) (cas $i = 1$) et pour vérifier $U_{\sigma_1} H_0 = (H - \sigma_1) U_{\sigma_1}$ qui se traduit alors par le système :

$$(105) \left[\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{k}_j} \right] \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{k}_j} - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\epsilon} \right] \varphi(\sigma_1, \vec{l}_1, \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1, \vec{k}_n)$$

$$= \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{k}_j} - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \varphi(\sigma_1, \vec{l}_1, \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1, \vec{k}_{i-1}, \vec{k}_{i+1}, \vec{k}_n)$$

$$\frac{\lambda^2}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(\omega_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \Phi(\sigma_1, \vec{l}_1, \vec{l}_{i-1}, \vec{l}_{i+1}, \vec{k}_1, \vec{k}_n)$$

$$(106) \Phi(\sigma_1, \vec{l}_1, \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1, \vec{k}_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{k}_j} - \Delta m + i\epsilon} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \varphi(\sigma_1, \vec{l}_1, \vec{l}_{n-1}, \vec{k}_1, \vec{k}_i, \vec{k}_{n+1})$$

On peut constater que si l'équation intégrale (105) admet une solution pour $n = n_0$ fixé, on est assuré qu'elle admet un second membre (donc une solution) pour $n = n_0 + 1$, par conséquent pour tout n supérieur à n_0 .

Il apparaît immédiatement que la solution de (105) existe pour $n = 1$, il suffit de se reporter à (97) (cas $i = 1$) Il en résulte que (105) admet toujours un second membre pour $n > 1$.

Pour vérifier (101) et (102), nous n'avons pas intérêt à manipuler U_{σ_1} sous la forme du développement opératoriel (104) et nous allons le définir par ses éléments de matrice dans l'espace de Fock des particules V, N, Θ libres. Posons

$$(107) U_{\sigma_1} = U_{1\sigma_1} \gamma_V^* \gamma_V + U_{2\sigma_1} \gamma_N^* \gamma_V - U_{1\sigma_1} \gamma_V^* \gamma_N^* \gamma_N \gamma_V$$

où $U_{1\sigma_1}$ et $U_{2\sigma_1}$ sont définis dans l'espace de Fock des particules θ libres; l'équation (99) conduit alors à

$$(108) \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} [U_{1\sigma_1}, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- + [\sigma_1 - \delta m_v] U_{1\sigma_1} = \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}} U_{2\sigma_1}$$

$$(109) \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} [U_{2\sigma_1}, a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}]_- + [\sigma_1 - \Delta m] U_{2\sigma_1} = \lambda \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^* U_{1\sigma_1}$$

Si nous représentons $U_{1\sigma_1}$ et $U_{2\sigma_1}$ dans l'espace de Fock des particules θ libres par des matrices dont les seuls éléments non nuls sont :

$$(110) \begin{cases} \langle x_1 \dots x_n | U_{1\sigma_1} | \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \rangle = \sqrt{n!} \overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \\ \langle x_1 \dots x_{n+1} | U_{2\sigma_1} | \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \rangle = \lambda \sqrt{(n+1)!} \overline{\Phi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}) \end{cases}$$

le système (108), (109) se ramène à

$$(111) \left[\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} \right] \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{f^2(\omega_{\vec{l}})}{2\omega_{\vec{l}}} \frac{1}{\omega_{\vec{l}} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - (\omega_{\vec{l}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \\ = \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{f(\omega_{\vec{l}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}}}} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - (\omega_{\vec{l}} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{i-1}, \vec{l}, \vec{x}_{i+1} \dots \vec{x}_n)$$

$$(112) \overline{\Phi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1} \dots \vec{x}_{n+1})$$

qui pour $n = 1$ nous donne (97), (98) (cas $i = 1$). Si nous posons

$$(113) \quad \overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \sum_{i=1}^n \varphi(\sigma_i, \vec{x}_i) P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1} \vec{x}_n) + \varphi(\sigma_1 \dots \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$$

où $\varphi(\sigma_i, \vec{x})$ satisfait l'équation (97) cas $i = 1$, on vérifie que

$$\sqrt{n!} \overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \langle x_1 \dots x_n | \sum_{j=1}^{\infty} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_j d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_j \varphi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \vec{k}_1 \dots \vec{k}_j) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_j}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_j} \right) | \Lambda_1 \dots \Lambda_{n-1} \rangle$$

Remarque : l'équation (111) est également obtenue à partir de (33) en remplaçant dans cette dernière $\omega_{\vec{\lambda}_n}$ par σ_1 , (113) étant garant de l'existence de la solution de (111).

Nous pouvons dès lors calculer

$$U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_1} = [U_{1\sigma_1}^* U_{1\sigma_1} + U_{2\sigma_1}^* U_{2\sigma_1}] [\Psi_V^* \Psi_V - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V] ;$$

la relation

$$(114) \quad U_{1\sigma_1}^* U_{1\sigma_1} + U_{2\sigma_1}^* U_{2\sigma_1} = I \text{ est un cas particulier de la relation } U_{1\sigma_1}^* U_{1\sigma_1} + U_{2\sigma_1}^* U_{2\sigma_1} = I \text{ établie dans l'appendice IV.}$$

Elle ne nécessite pas de précision sur le signe précédant $i\varepsilon$ dans (112) et par suite dans (111) (nous aurions pu choisir le signe - devant $i\varepsilon$). $\Psi_V^* \Psi_V - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$ est un projecteur; c'est le projecteur initial de l'opérateur partiellement isométrique U_{σ_1} . On peut vérifier directement les différentes propriétés des opérateurs partiellement isométriques et notamment

$$(115) \quad U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_1} = U_{\sigma_1} ; \quad U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* = U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* \text{ projecteur final de } U_{\sigma_1} .$$

Pour établir les relations

$$(116) \quad V_1^* U_{1\sigma_1} + V_2^* U_{2\sigma_1} = 0 \text{ et } N_1^* U_{1\sigma_1} + N_2^* U_{2\sigma_1} = 0 \text{ qui entraînent (102),}$$

U étant l'opérateur isométrique défini par [(64) à (70)] , il est nécessaire de faire précéder $i\mathcal{E}$ du signe + comme il a été fait dans (111) et (112); mais ces vérifications nous laissent toute latitude dans le choix des solutions $\varphi'(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ de l'équation obtenue quand on tient compte dans (111) de la forme de $\overline{\varphi}(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ donnée par (113).

Nous avons ainsi des solutions possibles du système (99), (100), (101), (102) . Chacune de ces solutions est un opérateur partiellement isométrique, de projecteur initial $\Psi_V^* \Psi_V$ -

$\Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$, qui agissant sur un vecteur propre de H_0 appartenant au sous espace initial de U_{σ_1} (vecteur propre de la forme $\frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\vec{x}_1}^* \dots a_{\vec{x}_n}^* \Psi_V^* |0\rangle$) correspondant à la valeur propre $m_V + \sum_{i=1}^n \omega \vec{x}_i$, donne le vecteur propre de H correspondant à la valeur propre $\sigma_1 + m_V + \sum_{i=1}^n \omega \vec{x}_i$, et ceci pour tout n - L'indétermination des opérateurs U_{σ_1} entraîne l'indétermination des vecteurs propres de $H = U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^*$, projecteur final de U_{σ_1} , projeté sur les vecteurs propres de H correspondant aux valeurs propres $\sigma_1 + m_V + \sum_{i=1}^n \omega \vec{x}_i$ et vérifie les relations

$$(117) \quad [U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* , H]_- = 0 \quad \text{et} \quad U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* U U^* = 0 .$$

2 Etude du système [(99) à (102)] , cas i . (Résultats) -

De façon générale

$$(118) \quad U_{\sigma} H_0 = (H - \sigma) U_{\sigma}$$

$$(119) \quad U_{\sigma} H_0 \Psi_V^* |0\rangle = (H - \sigma) U_{\sigma} \Psi_V^* |0\rangle \quad \text{nous donnant l'état discret}$$

(96), cas i

$$(120) \quad U_{\sigma}^* U_{\sigma} = \text{Projecteur}$$

$$(121) \quad U_{\sigma} U_{\sigma}^{\dagger} U_{\sigma_j} U_{\sigma_j}^{\dagger} = 0 \quad i \neq j ; \quad U_{\tau} U_{\sigma}^{\dagger} U U^{\dagger} = 0 .$$

admet pour solution

$$(122) \quad \sigma = \sigma_i$$

$$(123) \quad U_{\sigma_i} = U_{1\sigma_i} \Upsilon_V^* \Upsilon_V + U_{2\sigma_i} \Upsilon_N^* \Upsilon_V - U_{1\sigma_i} \Upsilon_V^* \Upsilon_N^* \Upsilon_N \Upsilon_V$$

$U_{1\sigma_i}$ et $U_{2\sigma_i}$ sont représentés dans l'espace de Fock des particules Θ libres par des matrices dont les seuls éléments non nuls :

$$(124) \quad \langle x_1 \dots x_n | U_{1\sigma_i} | \Lambda_1 \dots \Lambda_{n-i} \rangle = \sqrt{n!} \overline{\varphi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$$

$$(125) \quad \langle x_1 \dots x_{n+1} | U_{2\sigma_i} | \Lambda_1 \dots \Lambda_{n-i} \rangle = \sqrt{(n+1)!} \overline{\Phi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1})$$

vérifient :

$$(126) \quad \left[\sigma_i + \sum_{p=1}^{n-i} \omega_{\vec{\Lambda}_p} - \sum_{q=1}^n \omega_{\vec{x}_q} \right] \left[1 - \lambda^2 \left(\frac{d \overline{f}(\omega_{\vec{x}_q})}{2 \omega_{\vec{x}_q}} \right) \frac{1}{\omega_{\vec{x}_q} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_i + \sum_{p=1}^{n-i} \omega_{\vec{\Lambda}_p} - \sum_{q=1}^n \omega_{\vec{x}_q} - (\omega_{\vec{x}_q} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \times$$

$$\times \overline{\varphi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) =$$

$$= \lambda^2 \left(\frac{d \overline{f}(\omega_{\vec{x}_q})}{2 \omega_{\vec{x}_q}} \right) \frac{1}{\sigma_i + \sum_{p=1}^{n-i} \omega_{\vec{\Lambda}_p} - \sum_{q=1}^n \omega_{\vec{x}_q} - (\omega_{\vec{x}_q} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{q=1}^n \frac{\overline{f}(\omega_{\vec{x}_q})}{\sqrt{2 \omega_{\vec{x}_q}}} \overline{\varphi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{q-1}, \vec{x}_{q+1} \dots \vec{x}_n)$$

$$(127) \quad \overline{\varphi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \varphi(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) +$$

$$\frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{(n-i)!}} i! \sum_{\{j_1 \dots j_i\}} \varphi(\sigma_i, \vec{x}_{j_1} \dots \vec{x}_{j_i}) P(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_{j_1} \dots \vec{x}_{j_i})$$

$$(128) \quad \overline{\Phi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{\sigma_i + \sum_{p=1}^{n-i} \omega_{\vec{\Lambda}_p} - \sum_{q=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_q} - \Delta m + i\varepsilon}$$

$$\sum_{q=1}^{n+1} \frac{\overline{f}(\omega_{\vec{x}_q})}{\sqrt{2 \omega_{\vec{x}_q}}} \overline{\varphi}(\sigma_i \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-i}, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_q \dots \vec{x}_{n+1})$$

où $\varphi(\sigma_i, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i)$ et $\phi(\sigma_i, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i+1})$ vérifient (97) et (98) (casi).

U_{σ_i} est un opérateur partiellement isométrique, de projecteur initial $\Psi_V^* \Psi_V - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$ et dont le projecteur final $U_{\sigma_i}^* U_{\sigma_i}$ vérifie (121) et

$$(129) \quad \begin{bmatrix} U_{\sigma_i} & U_{\sigma_i}^* & H \end{bmatrix}_- = 0$$

Le calcul de $U_{1\sigma_i}^* U_{1\sigma_j} + U_{2\sigma_i}^* U_{2\sigma_j} = 0$, $i \neq j$, traduisant (121) se calque sur celui de $U_{1\sigma_i}^* U_{1\sigma_i} + U_{2\sigma_i}^* U_{2\sigma_i} = I$ fait dans l'appendice IV et présente moins de difficultés.

3. Généralité de la solution.

Nous allons montrer que U_σ donné par (104) est la solution la plus générale qui satisfasse le système (99), (100), (101), (102).

Les développements possibles vérifiant $U_\sigma H_0 = (H - \sigma) U_\sigma$ sont:

a) $U^1 \Psi_V^* \Psi_V + U^2 \Psi_N^* \Psi_V - U^1 \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$, opérateur nul à l'extérieur du domaine sous tendu par $\frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\vec{x}_1}^* \dots a_{\vec{x}_n}^* \Psi_V^* |0\rangle$, c'est à dire

un opérateur de support P_1 contenu dans où égal à

$$\Psi_V^* \Psi_V - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V \quad ; \quad P_1 \subseteq \Psi_V^* \Psi_V - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

b) $U^3 \Psi_V^* \Psi_N + U^4 \Psi_N^* \Psi_N - U^4 \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$, de support P_2 :

$$P_2 \subseteq \Psi_N^* \Psi_N - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

c) $U^5 \Psi_V^* + U^6 \Psi_N^* - U^5 \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N + U^6 \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_V$, de support P_3 :

$$P_3 \subseteq 1 - \Psi_V^* \Psi_V - \Psi_N^* \Psi_N + \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

$$(d) \ U^7 \psi_v^* \psi_N \psi_v + U^8 \psi_N^* \psi_N \psi_v, \text{ de support } P_4 \subseteq \psi_v^* \psi_N^* \psi_N \psi_v$$

et leurs combinaisons linéaires. Il est à remarquer que les supports de ces opérateurs sont orthogonaux.

Nous allons prendre par exemple la combinaison des deux premiers:

$$\hat{U}_\sigma = U_{1\sigma} \psi_v^* \psi_v + U_{2\sigma} \psi_N^* \psi_v - U_{1\sigma} \psi_v^* \psi_N^* \psi_N \psi_v + U_{3\sigma} \psi_v^* \psi_N + U_{4\sigma} \psi_N^* \psi_N - U_{4\sigma} \psi_v^* \psi_N^* \psi_N \psi_v$$

pour vérifier le système

$$(A) \ \hat{U}_\sigma H_0 = (H - \sigma) \hat{U}_\sigma$$

$$(B) \ \hat{U}_\sigma H_0 \psi_v^* |0\rangle = (H - \sigma) \hat{U}_\sigma \psi_v^* |0\rangle \quad \text{qui nous donne l'état discret (96) (i = 1)}$$

$$(C) \ \hat{U}_\sigma^* \hat{U}_\sigma = \text{Projecteur}$$

$$(D) \ \hat{U}_\sigma \hat{U}_\sigma^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = 0, \ i \neq 1, \ \hat{U}_\sigma \hat{U}_\sigma^* U U^* = 0.$$

Pour que (B) nous donne (96) cas $i = 1$, il est nécessaire de prendre $\sigma = \sigma_1$.

Posons alors : $\hat{U}_{\sigma_1} = U_{\sigma_1} + U'_{\sigma_1}$, où

$$U_{\sigma_1} = U_{1\sigma_1} \psi_v^* \psi_v + U_{2\sigma_1} \psi_N^* \psi_v - U_{1\sigma_1} \psi_v^* \psi_N^* \psi_N \psi_v$$

$$U'_{\sigma_1} = U_{3\sigma_1} \psi_v^* \psi_N + U_{4\sigma_1} \psi_N^* \psi_N - U_{4\sigma_1} \psi_v^* \psi_N^* \psi_N \psi_v$$

(C') Si C est réalisé, le support de $\hat{U}_{\sigma_1}$ devient le projecteur initial de l'opérateur partiellement isométrique $\hat{U}_{\sigma_1}$ et l'on peut écrire $\hat{U}_{\sigma_1}^* \hat{U}_{\sigma_1} = P_1 + P_2$, P_1 et P_2 étant les supports de U_{σ_1} et U'_{σ_1} respectivement. Il est immédiat que $\hat{U}_{\sigma_1}^* \hat{U}_{\sigma_1} P_1 = P_1 \hat{U}_{\sigma_1}^* \hat{U}_{\sigma_1} = P_1$, donc que $P_1 \hat{U}_{\sigma_1}^* \hat{U}_{\sigma_1} P_1 = U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_1} = \text{projecteur}$. On peut conclure :

Une condition nécessaire pour que $\overset{\circ}{U}_{\sigma_1}$ soit un opérateur partiellement isométrique est que $U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_1}$ et $U'_{\sigma_1} U'_{\sigma_1}$ soient des projecteurs.

(D') La condition (D) peut encore s'exprimer ainsi: $\overset{\circ}{U}_{\sigma_1}$ agissant sur un vecteur quelconque de son espace de définition, ne doit en aucune façon donner un vecteur appartenant aux sous espaces définis par les projecteurs $U U^*$ et $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*$ pour $i \neq 1$.

Ceci étant, pour qu'une solution $\overset{\circ}{U}_{\sigma_1}$ du système (A), (B), (C), (D) existe et en remarquant que (A) se décompose en $A^{(1)} + A^{(2)}$ et B en $B^{(1)} + B^{(2)}$, il est nécessaire qu'il existe une solution pour chacun des deux systèmes

$$I \quad (A^{(1)}) \quad U_{\sigma_1} H_0 = (H - \sigma_1) U_{\sigma_1}$$

$$(B^{(1)}) \quad U_{\sigma_1} H_0 \chi_v^* 10 \rangle = (H - \sigma_1) U_{\sigma_1} \chi_v^* 10 \rangle \quad \text{qui donne l'état discret (96) (cas } i = 1)$$

$$(C^{(1)}) \quad U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_1} = \text{Projecteur}.$$

Ce problème est résolu (voir étude de U_{σ_1}) et les relations

$$U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = 0 \quad i \neq 1, \quad U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* U U^* = 0 \text{ en résultent.}$$

II.

$$A^{(2)} \quad U'_{\sigma_1} H_0 = (H - \sigma_1) U'_{\sigma_1}$$

$$(B^{(2)}) \quad U'_{\sigma_1} H_0 \chi_v^* 10 \rangle = (H - \sigma_1) U'_{\sigma_1} \chi_v^* 10 \rangle = 0$$

$$(C^{(2)}) \quad U'_{\sigma_1} U'_{\sigma_1} = \text{Projecteur}$$

(D²) U'_{σ_1} agissant sur un vecteur de son espace de définition ne donne en aucune manière un vecteur appartenant aux sous espaces définis par les projecteurs $U U^*$, $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*$ $i \neq 1$ (nécessaire pour que D' soit vérifié).

(B²) ne donnant aucune indication sur le développement de U'_{σ_1} , nous partons du développement le plus général possible :

$$\begin{aligned}
 U'_{\sigma_1} = & \sum_{i,j} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_j \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_j) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_j}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_i} \Psi_v^* \Psi_N \\
 & + \sum_{i,j} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_{j+1} \lambda \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{j+1}) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_{j+1}}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_i} \Psi_N^* \Psi_N \\
 & - \sum_{i,j} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_{j+1} \lambda \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{j+1}) a_{\vec{k}_1}^* \dots a_{\vec{k}_{j+1}}^* a_{\vec{l}_1} \dots a_{\vec{l}_i} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_v
 \end{aligned}$$

qui doit satisfaire $U'_{\sigma_1} H_0 = (H - \sigma_1) U'_{\sigma_1}$, ce qui se traduit alors par le système

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \left[\sigma_1 + \Delta m + \sum_{m=1}^i \omega_{\vec{l}_m} - \sum_{n=1}^j \omega_{\vec{k}_n} \right] & \left[1 - \lambda^2 \frac{d\vec{l}}{2\omega_{\vec{l}}} \frac{f(\omega_{\vec{l}})}{\omega_{\vec{l}} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{m=1}^i \omega_{\vec{l}_m} - \sum_{n=1}^j \omega_{\vec{k}_n} - \omega_{\vec{l}} + i\varepsilon} \right] \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_j) \\
 & - \lambda^2 \frac{d\vec{l}}{2\omega_{\vec{l}}} \frac{f(\omega_{\vec{l}})}{\sigma_1 + \sum_{m=1}^i \omega_{\vec{l}_m} - \sum_{n=1}^j \omega_{\vec{k}_n} - \omega_{\vec{l}} + i\varepsilon} \sum_{n=1}^j \frac{f(\omega_{\vec{k}_n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_n}}} \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n, \vec{l} \vec{k}_{n+1} \dots \vec{k}_j) \\
 & + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{m=1}^i \frac{f(\omega_{\vec{l}_m})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_m}}} \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_m, \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_j) \\
 (\beta) \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{j+1}) & = \frac{1}{j+1} \frac{1}{\sigma_1 + \sum_{m=1}^i \omega_{\vec{l}_m} - \sum_{n=1}^{j+1} \omega_{\vec{k}_n} + i\varepsilon} \sum_{n=1}^{j+1} \frac{f(\omega_{\vec{k}_n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_n}}} \Psi(\sigma_1 \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n, \vec{k}_{j+1})
 \end{aligned}$$

Si pour des valeurs fixées de i et de j : i_0 et j_0 , l'équation intégrale (α) admet une solution, cette équation admet un second membre pour $i = i_0 + 1$, $j = j_0 + 1$ et par conséquent une solution; et de façon générale elle admet alors une solution pour $i = i_0 + n$ et $j = j_0 + n$, $n \geq 1$.

Or nous n'avons pas de condition initiale qui nous définisse un deuxième membre pour l'équation intégrale (α) , mais il se peut que l'équation homogène qui lui est associée admette une solu-

tion. Plusieurs cas sont à envisager.

$$1^{\circ} \quad \sigma_1 + \Delta m = 0$$

La solution de l'équation homogène associée à (α) est immédiate; en effet pour $i = j = 0$ on a :

$$[\sigma_1 + \Delta m] \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{f^2(\omega \vec{e})}{2\omega \vec{e}} \frac{1}{\omega \vec{e} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_1 - \omega \vec{e}} \right] \Psi(\sigma_1) = 0 \quad \text{et}$$

$$\Psi(\sigma_1) = C^{te} \quad \Psi(\sigma_1, \vec{k}) = \frac{f(\omega \vec{k})}{\sqrt{2\omega \vec{k}}} \frac{C^{te}}{\sigma_1 - \omega \vec{k}} = - \frac{f(\omega \vec{k})}{\sqrt{2\omega \vec{k}}} \frac{1}{\omega \vec{k} + \Delta m} C^{te}$$

Il n'est pas utile de pousser plus loin la construction de U'_{σ_1} dans ce cas, il suffit de remarquer que $U'_{\sigma_1} \gamma_N^* 10 \rangle = U \gamma_V^* 10 \rangle$ ce qui est en contradiction avec $D^{(2)}$. Une telle solution est à exclure.

$$2^{\circ} \quad \sigma_1 + \Delta m = \sigma_i$$

La solution de l'équation homogène associée à (α) est $\Psi(\sigma_i, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_i) = \Psi(\sigma_i, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_i)$. En effet en tenant compte du fait que $\sigma_1 = \sigma_i - \Delta m$ dans (α) , il vient pour $i = 0$ et $j = i$

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_i - \sum_{j=1}^i \omega_{\vec{k}_j} \right] \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{f^2(\omega \vec{e})}{2\omega \vec{e}} \frac{1}{\omega \vec{e} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_i - \sum_{j=1}^i \omega_{\vec{k}_j} - (\omega \vec{e} + \Delta m)} \right] \Psi(\sigma_i, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_i) \\ &= \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{f(\omega \vec{e})}{\sqrt{2\omega \vec{e}}} \frac{1}{\sigma_i - \sum_{j=1}^i \omega_{\vec{k}_j} - (\omega \vec{e} + \Delta m)} \sum_{j=1}^i \frac{f(\omega \vec{k}_j)}{\sqrt{2\omega \vec{k}_j}} \Psi(\sigma_i, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{j-1}, \vec{k}_{j+1}, \dots, \vec{k}_i) \\ & \Psi(\sigma_i, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{i+1}) = \frac{1}{(i+1)} \frac{1}{\sigma_i - \sum_{j=1}^{i+1} \omega_{\vec{k}_j} - \Delta m} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{f(\omega \vec{k}_j)}{\sqrt{2\omega \vec{k}_j}} \Psi(\sigma_i, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_j, \vec{k}_{i+1}) \end{aligned}$$

qui est le système (97), (98) (cas i). Ici encore inutile de pousser plus loin la construction de U'_{σ_1} , il suffit de remarquer que $U'_{\sigma_1} \gamma_N^* 10 \rangle = U_{\sigma_i} \gamma_V^* 10 \rangle$, nous sommes à nouveau en contradiction avec D^2 .

$$3^{\circ} \quad \sigma_1 + m_0 + \Delta m < \sigma_2 < 2m_0$$

Une solution de l'équation homogène associée à (α) est alors
 $\varphi(\sigma_1, \vec{k}_1, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \delta(\sigma_1 + \Delta m + \omega_{\vec{k}} - \sigma_2) \varphi(\sigma_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$ pour $i = 1$,
 $j = 2$, qui vérifie

$$\begin{aligned} & [\sigma_1 + \Delta m + \omega_{\vec{k}} - (\omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2})] \left[1 - \lambda^2 \left(d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_1 + \omega_{\vec{k}} - (\omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2}) - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} \right] \times \\ & \times \delta(\sigma_1 + \Delta m + \omega_{\vec{k}} - \sigma_2) \varphi(\sigma_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = \\ & \lambda^2 \left(d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \frac{\delta(\sigma_1 + \Delta m + \omega_{\vec{k}} - \sigma_2)}{\sigma_1 + \omega_{\vec{k}} - (\omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2}) - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} \left[\frac{f(\omega_{\vec{k}_1})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_1}}} \varphi(\sigma_2, \vec{k}, \vec{k}_2) + \frac{f(\omega_{\vec{k}_2})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_2}}} \varphi(\sigma_2, \vec{k}_1, \vec{k}) \right] \end{aligned}$$

(voir (97) cas $i = 2$). U'_{σ_1} construit à partir de cette solution ne conserve pas le produit scalaire sur son espace de définition et nous sommes en contradiction avec C⁽²⁾.

On démontre ainsi que la solution la plus générale du système (A), (B), (C), (D) est U_{σ_1} défini par [(107) à (113)].

De même U_{σ_2} donné par [(123) à (128)] est la solution la plus générale du système [(118) à (121)] -

4. Les autres systèmes et leurs solutions.

Dans une seconde étape, nous allons donner d'autres solutions partiellement isométriques de l'équation $U_{\sigma} H_0 = (H - \sigma) U_{\sigma}$, correspondant à l'état discret (96) cas i , ayant même sous espace final que U_{σ_i} . Chacune de ces solutions dépend de la façon d'introduire l'état discret (96), cas i , dans le système à résoudre -

Ainsi la solution la plus générale vérifiant le système :

$$(130) \left[\begin{array}{l} U_{\sigma} H_0 = (H - \sigma) U_{\sigma} \\ U_{\sigma} H_0 \Psi_N^* |0\rangle = (H - \sigma) U_{\sigma} \Psi_N^* |0\rangle \quad \text{qui donne l'état discret} \\ U_{\sigma}^{\dagger} U_{\sigma} = \text{Projecteur} \\ U_{\sigma} U_{\sigma}^{\dagger} \cdot U_{\sigma_j} U_{\sigma_j}^{\dagger} = 0 \quad i \neq j, \quad U U^{\dagger} U_{\sigma} U_{\sigma}^{\dagger} = 0 \quad \text{est} \end{array} \right. \quad (96) \text{ (cas i)}$$

$$(131) \left[\begin{array}{l} \sigma = \sigma_i' = \sigma_i - \Delta m \\ U_{\sigma_i'} = U_{1\sigma_i} \Psi_V^* \Psi_N + U_{2\sigma_i} \Psi_N^* \Psi_N - U_{2\sigma_i} \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V \end{array} \right.$$

où $U_{1\sigma_i}$, $U_{2\sigma_i}$ sont représentés dans l'espace de Fock des particules $\ominus$ libres par des matrices dont les seuls éléments non nuls vérifient $[(124) \text{ à } (128)]$ -

$U_{\sigma_i'}$ est un opérateur partiellement isométrique, de projecteur initial $\Psi_N^* \Psi_N - \Psi_N^* \Psi_V^* \Psi_N \Psi_V$ et dont le projecteur final $U_{\sigma_i'}^{\dagger} U_{\sigma_i'}^*$ est égal à $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^{\dagger}$, U_{σ_i} étant donné par $[(123) \text{ à } (128)]$ -

Nous pouvons conclure :

$U_{\sigma_i'}$ satisfaisant le système (130) est un opérateur partiellement isométrique, de projecteur initial $\Psi_N^* \Psi_N - \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$ (orthogonal au projecteur initial de U_{σ_i}) qui, agissant sur un vecteur propre de H_0 appartenant au sous espace initial de $U_{\sigma_i'}$ (vecteur propre de la forme $\frac{1}{\sqrt{m!}} a_{\vec{x}_1}^* \dots a_{\vec{x}_m}^* \Psi_N^* |0\rangle$) correspondant à la valeur propre $m_N + \sum_{i=1}^m \omega_{\vec{x}_i}$, donne le vecteur propre de H correspondant à la valeur propre $m_N + \sigma_i' + \sum_{i=1}^m \omega_{\vec{x}_i} = m_V + \sigma_i + \sum_{i=1}^m \omega_{\vec{x}_i}$. $U_{\sigma_i'} U_{\sigma_i'}^{\dagger}$ projette donc sur les vecteurs propres de H correspondant aux valeurs propres $m_V + \sigma_i + \sum_{i=1}^m \omega_{\vec{x}_i}$ ainsi que $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^{\dagger}$.

La solution du système

$$(132) \left[\begin{array}{l} \overline{U_\sigma} H_0 = (H - \sigma) U_\sigma \\ U_\sigma H_0 |10\rangle = (H - \sigma) U_\sigma |10\rangle \quad \text{donnant l'état discret (96), cas i} \\ U_\sigma^\dagger U_\sigma = \text{Projecteur} \\ U_\sigma U_\sigma^\dagger U_{\sigma_j''} U_{\sigma_j''}^\dagger = 0, j \neq i ; U_\sigma U_\sigma^\dagger U U^\dagger = 0 \quad \text{est} \end{array} \right.$$

$$(133) \left[\begin{array}{l} \sigma = \sigma_i'' = m_v + \sigma_i \\ U_{\sigma_i''} = U_{1\sigma_i} \Psi_v^* + U_{2\sigma_i} \Psi_N^* - U_{1\sigma_i} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N + U_{2\sigma_i} \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N \end{array} \right.$$

où $U_{1\sigma_i}$ et $U_{2\sigma_i}$ sont donnés par [(124) à (128)] .

$U_{\sigma_i''}$ est un opérateur partiellement isométrique, de projecteur initial $U_{\sigma_i''}^\dagger U_{\sigma_i''} = 1 - \Psi_v^* \Psi_v - \Psi_N^* \Psi_N + \Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_v$ et dont le projecteur final $U_{\sigma_i''} U_{\sigma_i''}^\dagger$ est égal à $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger$

et la solution de

$$(134) \left[\begin{array}{l} U_\sigma H_0 = (H - \sigma) U_\sigma \\ U_\sigma H_0 \Psi_v^* \Psi_N^* |10\rangle = (H - \sigma) U_\sigma \Psi_v^* \Psi_N^* |10\rangle \quad \text{donnant l'état discret (96), cas i .} \\ U_\sigma^\dagger U_\sigma = \text{Projecteur} \\ U_\sigma U_\sigma^\dagger U_{\sigma_j'''} U_{\sigma_j'''}^\dagger = 0, i \neq j ; U_\sigma U_\sigma^\dagger U U^\dagger = 0 \quad \text{est} \end{array} \right.$$

$$(135) \left[\begin{array}{l} \sigma = \sigma_i''' = \sigma_i + m_N \\ U_{\sigma_i'''} = U_{1\sigma_i} \Psi_v^* \Psi_N \Psi_v + U_{2\sigma_i} \Psi_N^* \Psi_N \Psi_v \end{array} \right.$$

où $U_{1\sigma_i}$ et $U_{2\sigma_i}$ sont donnés par [(124) à (128)] .

$U_{\sigma_i'''}$ est un opérateur partiellement isométrique de projecteur initial $\Psi_v^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_v$ et dont le projecteur final $U_{\sigma_i'''} U_{\sigma_i'''}^\dagger = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger$.

Conclusion ; les états discrets étant donnés par (96) où

$\sigma_i < i m_0$, $i = 1, 2 \dots$; $U U^\dagger + \sum_i U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger$ étant égal à I (U_{σ_i} étant défini par les relations [(123) à (128)]), nous avons des solutions du système $U_\sigma H_0 = (H - \sigma) U_\sigma$, $U_\sigma U_\sigma^\dagger = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger$ suivant la façon dont est introduit l'état discret d'énergie $(m_v + \sigma_i)$.

5. Diagonalisation de H .

Partant du système (118) à (121) et de sa résolution, il vient successivement

$$(136) \quad U_{\sigma_i} H_0 U_{\sigma_i}^\dagger = (H - \sigma_i) U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger (H - \sigma_i) \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} U_{\sigma_i} H_0 U_{\sigma_i}^\dagger &= m_v U_{\sigma_i} \gamma_v^* \gamma_v U_{\sigma_i}^\dagger + m_N U_{\sigma_i} \gamma_N^* \gamma_N U_{\sigma_i}^\dagger + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} U_{\sigma_i}^\dagger \\ &= m_v U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger U_{\sigma_i} \gamma_v^* \gamma_v U_{\sigma_i}^\dagger + m_N U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger U_{\sigma_i} \gamma_N^* \gamma_N U_{\sigma_i}^\dagger + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} U_{\sigma_i}^\dagger \end{aligned}$$

mais le projecteur initial de U_{σ_i} ne commutant ni avec γ_v^* , ni avec γ_N^* , il n'est pas possible d'introduire dans l'expression précédente les opérateurs $U_{\sigma_i} \gamma_v^* U_{\sigma_i}^\dagger$, $U_{\sigma_i} \gamma_N^* U_{\sigma_i}^\dagger$ et leurs adjoints vérifiant dans le sous espace final de U_{σ_i} les bonnes règles d'anticommuation . Si l'on note que $U_{\sigma_i} \gamma_v^* \gamma_v = U_{\sigma_i}$ et $U_{\sigma_i} \gamma_N^* = 0$, il vient :

$$U_{\sigma_i} H_0 U_{\sigma_i}^\dagger = m_v U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} U_{\sigma_i}^\dagger \cdot U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} U_{\sigma_i}^\dagger \quad \text{et (136) s'écrit}$$

$$(137) \quad (m_v + \sigma_i) U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger + \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} U_{\sigma_i}^\dagger \cdot U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} U_{\sigma_i}^\dagger = H U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger H$$

où

$$(138) \left[U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i}^*, U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i}^* \right]_- = \delta(\vec{k} \vec{k}') U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* \quad \left[U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*, U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i}^* \right]_- = 0$$

Un travail analogue peut être fait en partant de l'un quelconque des systèmes (130), (132), (134) et de sa résolution. Nous aboutissons toujours aux équations (137), (138), il suffit de remarquer que

$$(139) U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i}^* = U_{\sigma_i'} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i'}^* = U_{\sigma_i''} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i''}^* = U_{\sigma_i'''} a_{\vec{k}}^* U_{\sigma_i'''}^*$$

Dès lors en réunissant (95), (137), (138) et en tenant compte de $U U^\dagger + \sum_i U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^\dagger = I$, il vient :

$$(140) H = m_V U \gamma_V^* U^* U \gamma_V U^* + m_N U \gamma_N^* U^* U \gamma_N U^* + \sum_i (m_i + \sigma_i) U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* + \left(d \vec{k} \omega_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}} \right)$$

où

$$(141) A_{\vec{k}}^\dagger = U a_{\vec{k}}^\dagger U^\dagger + \sum_i U_{\sigma_i} a_{\vec{k}}^\dagger U_{\sigma_i}^\dagger \quad \text{vérifie les relations}$$

$$(142) \left[A_{\vec{k}}^\dagger, A_{\vec{k}}^\dagger \right]_- = \delta(\vec{k} \vec{k}') \quad ; \quad [U \gamma_V^* U^*, A_{\vec{k}}^\dagger]_- = [U \gamma_N^* U^*, A_{\vec{k}}^\dagger]_- = \\ = [U \gamma_V U^*, A_{\vec{k}}^\dagger]_- = [U \gamma_N U^*, A_{\vec{k}}^\dagger]_- = [U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*, A_{\vec{k}}^\dagger]_- = [U U^*, A_{\vec{k}}^\dagger]_- = 0$$

Nous avons ainsi construit des opérateurs création et annihilation de particules θ . Par contre il nous est impossible d'obtenir des opérateurs création (annihilation) de particules V et N . Il suffit de constater que

$$(143) \left[U_{\sigma_i} \gamma_V^* U_{\sigma_i}^\dagger = U_{\sigma_i'} \gamma_V^* U_{\sigma_i'}^\dagger = \dots = 0 \right. \\ \left. U_{\sigma_i} \gamma_N^* U_{\sigma_i}^\dagger = U_{\sigma_i'} \gamma_N^* U_{\sigma_i'}^\dagger = \dots = 0 \right]$$

6. Les opérateurs création (annihilation) des particules physiques Θ

Rappelons qu'il y a des solutions possibles U_{σ_i} pour le système [(118) à (121)] . (voir chapitre III, fin du paragraphe 1) -

Quelle que soit la solution U_{σ_i} choisie, nous pouvons calculer les opérateurs d'Heisenberg réduits au sous espace final de U_{σ_i} en fonction des opérateurs création et annihilation de particules Θ et du projecteur final de U_{σ_i} .

Dans une première étape ,

a) on établit que $U_{\sigma_i}^* \psi_v^* U_{\sigma_j} = U_{\sigma_i}^* \psi_n^* U_{\sigma_j} = 0$ quels que soient i et j , ce qui entraîne

$$(144) \quad U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* \psi_v^* U_{\sigma_j} U_{\sigma_j}^* = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* \psi_n^* U_{\sigma_j} U_{\sigma_j}^* = 0 \text{ quels que soient i et j ,}$$

b) et on calcule $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* a_k^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*$ en fonction des A_k^* , de leurs adjoints et de $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*$:

$$U_{\sigma_i}^* a_k^* U_{\sigma_i} = [U_{1\sigma_i}^* a_k^* U_{1\sigma_i} + U_{2\sigma_i}^* a_k^* U_{2\sigma_i}] [\psi_v^* \psi_v - \psi_v^* \psi_n^* \psi_n \psi_v]$$

expression définie dans l'espace de Fock des particules V, N, Θ libres , et

$$U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* a_k^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = U_{\sigma_i} [U_{1\sigma_i}^* a_k^* U_{1\sigma_i} + U_{2\sigma_i}^* a_k^* U_{2\sigma_i}] [\psi_v^* \psi_v - \psi_v^* \psi_n^* \psi_n \psi_v] U_{\sigma_i}^*$$

$$U_{\sigma_i} [U_{1\sigma_i}^* a_k^* U_{1\sigma_i} + U_{2\sigma_i}^* a_k^* U_{2\sigma_i}] U_{\sigma_i}^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* .$$

Puis en utilisant les propriétés $U_{\sigma_i}^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = U_{\sigma_i}^*$, $[U_{\sigma_i}^* U_{\sigma_i} , a_k^*] = 0$ et $[U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* , f(A A^*)]_- = 0$, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
 (145) \quad U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* a_k^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* &= U_{\sigma_i} U_{1\sigma_i}^* U_{\sigma_i}^* \cdot U_{\sigma_i} a_k^* U_{\sigma_i}^* \cdot U_{\sigma_i} U_{1\sigma_i} U_{\sigma_i}^* \cdot U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* + \\
 &+ U_{\sigma_i} U_{2\sigma_i}^* U_{\sigma_i}^* \cdot U_{\sigma_i} a_k^* U_{\sigma_i}^* \cdot U_{\sigma_i} U_{2\sigma_i} U_{\sigma_i}^* \cdot U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* \\
 &= \left[U_{1\sigma_i}^* (A A^*) A_k^* U_{1\sigma_i} (A A^*) + U_{2\sigma_i}^* (A A^*) A_k^* U_{2\sigma_i} (A A^*) \right] U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*
 \end{aligned}$$

D'où l'expression des opérateurs d'Heisenberg réduits au sous espace final de U_{σ_i} :

$$(146) \quad U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* e^{iHt} \psi_v^* e^{-iHt} U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* e^{iHt} \psi_n^* e^{-iHt} U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = 0$$

$$(147) \quad U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* e^{iHt} a_k^* e^{-iHt} U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* = e^{iHt} U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* a_k^* U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* e^{-iHt}$$

Nous avons calculé dans le cas $i = 1$ les opérateurs $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^* a_k^* \text{ in(out)}$ $U_{\sigma_i} U_{\sigma_i}^*$; ce sont les seuls opérateurs "ingoing" et "outgoing" qui, réduits au sous espace final de U_{σ_1} , sont non nuls. Il vient quelle que soit la solution U_{σ_1} choisie

$$(148) \quad U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* a_k^* \text{ in} U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* = A_k^* U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^*$$

$$(149) \quad U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* a_k^* \text{ out} U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* = A_k^* U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^* + O(\vec{k}, A A^*) U_{\sigma_1} U_{\sigma_1}^*$$

où $O(\vec{k}, A A^*)$ est représenté dans l'espace de Fock des particules $\mathcal{O}$ par une matrice dont les seuls éléments non nuls sont

$$(149') \quad \langle 0 | A_{\vec{x}_n} - A_{\vec{x}_n}^* \frac{1}{\sqrt{n!}} | O(\vec{k}, A A^*) | \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} A_{\vec{x}_1}^* - A_{\vec{x}_{n-1}}^* | 0 \rangle = 2i\pi \delta \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{k}} \right] \times$$

$$\frac{k(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \lambda^2 (n+1)! \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_{n+1} \overline{\Phi}^*(\sigma_1 \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\ell}_1 \dots \vec{\ell}_{n+1}) \Phi(\sigma_1 \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}_1 \dots \vec{\ell}_{n+1})$$

La relation (148) est nécessaire pour que $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in} = A_{\vec{k}}^{\pm}$, et pour que les opérateurs $A_{\vec{k}}^{\pm}$ et $A_{\vec{k}}^{\pm}$ puissent être considérés comme des opérateurs création et annihilation de particules physiques θ .

En résumé si nous avons des moyens de construire un opérateur $A_{\vec{k}}^{\pm}$ (et son adjoint) ayant de bonnes relations de commutation et qui nous laisse espérer que $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in} = A_{\vec{k}}^{\pm}$, il s'avère impossible de construire Ψ_v^* , Ψ_N^* et leurs adjoints vérifiant les bonnes relations d'anticommutation dans tout l'espace et, ce qui vient corroborer ces résultats, $\Psi_{v \text{ in}}^*$, $(\Psi_{v \text{ out}}^*)$, $\Psi_{N \text{ in}}^*$, $(\Psi_{N \text{ out}}^*)$, ont des expressions non nulles seulement dans le sous espace final de U (146). L'annulation de ces opérateurs dans les sous espaces finaux liés aux valeurs discrètes σ_{λ} semble résulter d'ailleurs des caractéristiques physiques du modèle.

CHAPITRE IV

Au sujet de la matrice S (cas sans état discret).

1. Les difficultés dans l'espace de Fock des particules libres.

Nous nous proposons d'étudier l'opérateur $U(t-\infty)$ défini sur l'espace de Fock des particules V, N, Θ libres et satisfaisant le système

$$(150) \quad i \frac{d}{dt} U(t-\infty) = H_I(t) U(t-\infty)$$

$$(151) \quad U^\dagger(t-\infty) U(t-\infty) = I$$

$$(152) \quad U(-\infty-\infty) = I$$

où $H_I(t)$ est l'Hamiltonien d'interaction du modèle de Lee en représentation d'interaction

$$(153) \quad H_I(t) = \lambda \left(d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[\gamma_V^* \gamma_N a_{\vec{k}} e^{-it(\omega_{\vec{k}} + \Delta m)} + \gamma_N^* a_{\vec{k}}^* \gamma_V e^{it(\omega_{\vec{k}} + \Delta m)} \right] + \delta m_V \gamma_V^* \gamma_V - \delta m_V \gamma_V^* \gamma_N^* \gamma_N \gamma_V \right)$$

Remarquons qu'il n'est pas très significatif de poser la condition initiale (152) sans connaître le type de convergence qui a lieu dans notre problème -

Au cours de la résolution, il est nécessaire d'introduire un temps initial t_i et de résoudre :

$$(154) \quad i \frac{d}{dt} U(t, t_i) = H_I(t) U(t, t_i)$$

$$(155) \quad U^\dagger(t, t_i) U(t, t_i) = I$$

$$(156) \quad U(t_i, t_i) = I$$

Des solutions possibles du système (154), (155), (156) s'écrivent

$$(157) \quad U(t \ t_i) = U(t) U^*(t_i)$$

$U(t)$ s'exprimant à partir des solutions U du système (7), (8) de la façon suivante :

$$(158) \quad U(t) = e^{iH_0 t} U e^{-iH_0 t} \quad \text{où } H_0 \text{ est donné par (9).}$$

Pour le vérifier il suffit de tenir compte de (157), (158) et de $H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$ dans (154), l'unitarité de U étant nécessaire pour vérifier (155) et (156) - Nous avons donc des solutions possibles du système (154), (155), (156) - Parmi ces solutions en existe-t-il une qui soit telle que

$$(159) \quad \lim_{t_i \rightarrow -\infty} U(t \ t_i) = U(t - \infty)$$

$$(160) \quad \left[\lim_{t_i \rightarrow -\infty} U^*(t \ t_i) \right] \left[\lim_{t'_i \rightarrow -\infty} U(t \ t'_i) \right] = I$$

$$(161) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t - \infty) = I .$$

Pour répondre à cette question, nous sommes amenés à introduire deux passages à la limite $t_i \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow -\infty$. La convergence la moins restrictive est la convergence faible :

$U(t \ t_i) g \rightharpoonup U(t - \infty) g$ pour tout g de l'espace de Fock. On pourrait espérer résoudre (150), (151), (152) à partir de (154), (155), (156), (159), (160), (161), en prenant les limites dans ces trois dernières expressions au sens de la convergence faible.

Si ceci se réalisait, l'opérateur $U(t - \infty) = \lim_{t_i \rightarrow -\infty}$

$U(t) U^*(t_i)$ serait un opérateur unitaire selon (160), autrement dit, le passage à la limite $t_i \rightarrow -\infty$ en convergence faible, entraînerait la conservation de la norme et nous aurions la conver-

gence forte .

limite $U(t) U^*(t_i) g \rightarrow U(t - \infty) g$ pour tout g de l'espace
 $t_i \rightarrow -\infty$ de Fock .

La même remarque est valable pour le passage à la limite $U(t - \infty)$.
 $t \rightarrow -\infty$

Nous allons voir que dans le cas du modèle de Lee, le passage à la limite $t_i \rightarrow -\infty$ (convergence faible) définit un $U(t - \infty)$ qui n'est plus unitaire; la norme n'étant pas conservée au cours de cette opération, la convergence forte n'a pas lieu et il est impossible dans ces conditions de résoudre (150), (151), (152).

Nous allons calculer $U(t, t_i) = U(t) U^*(t_i) = e^{iH_0 t} U e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t_i} U^* e^{-iH_0 t_i}$.

Dans le cas le plus favorable U est la solution du système (7), (8) donnée par les équations [(64) à (70)] - Le choix de cette solution se justifie par ce qui suit .

$$\begin{aligned} (162) \quad U(t, t_i) &= U(t) U^*(t_i) = I + [V_1(t) V_1^*(t_i) + N_1(t) N_1^*(t_i) e^{i\Delta m(t_i-t)}] \Psi_V^* \Psi_V \\ &+ [N_2(t) N_2^*(t_i) + V_2(t) V_2^*(t_i) e^{i\Delta m(t-t_i)} - I] \Psi_N^* \Psi_N + [V_1(t) V_2^*(t_i) e^{-i\Delta m t_i} + N_1(t) N_2^*(t_i) e^{-i\Delta m t}] \Psi_V^* \Psi_N \\ &+ [V_2(t) V_1^*(t_i) e^{i\Delta m t} + N_2(t) N_1^*(t_i) e^{i\Delta m t_i}] \Psi_N^* \Psi_V + [2] - V_1(t) V_1^*(t_i) - N_2(t) N_2^*(t_i) \\ &- V_2(t) V_2^*(t_i) e^{i\Delta m(t-t_i)} - N_1(t) N_1^*(t_i) e^{i\Delta m(t_i-t)}] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V \end{aligned}$$

où $V_1(t) = e^{iH_0 t} V_1 e^{-iH_0 t}$, $N_1(t) = e^{iH_0 t} N_1 e^{-iH_0 t}$, si nous posons

$$(163) \mathcal{V}_1(t) = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} [V_1(t) V_1^*(t_i) + N_1(t) N_1^*(t_i) e^{i\Delta m(t-t_i)}]$$

$$(164) \mathcal{V}_2(t) = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} [V_2(t) V_1^*(t_i) e^{i\Delta m t} + N_2(t) N_1^*(t_i) e^{i\Delta m t_i}]$$

$$(165) \mathcal{N}_1(t) = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} [V_1(t) V_2^*(t_i) e^{-i\Delta m t_i} + N_1(t) N_2^*(t_i) e^{-i\Delta m t}]$$

$$(166) \mathcal{N}_2(t) = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} [N_2(t) N_2^*(t_i) + V_2(t) V_2^*(t_i) e^{i\Delta m(t-t_i)}]$$

alors d'après (159)

$$(167) U(t-\infty) = I + [\mathcal{V}_1(t) - I] \Psi_V^* \Psi_V + \mathcal{V}_2(t) \Psi_N^* \Psi_V + \mathcal{N}_1(t) \Psi_V^* \Psi_N \\ + [\mathcal{N}_2(t) - I] \Psi_N^* \Psi_N + [2I - \mathcal{V}_1(t) - \mathcal{N}_2(t)] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

L'opérateur $\mathcal{V}_1(t)$ est représenté dans l'espace de Fock des particules Θ libres par une matrice dont les seuls éléments non nuls sont

$$(168) \langle k_1 \dots k_n | \mathcal{V}_1(t) | \Lambda_1 \dots \Lambda_n \rangle =$$

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} n! \lambda^2 \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_{n+1} e^{i[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} + \Delta m]t_i} \Psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n) e^{i[\sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \Delta m]t} \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n)$$

$$+ \lim_{t_i \rightarrow -\infty} n! \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n e^{i[\sum_{j=1}^n (\omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{x}_j})]t} \Psi_N(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n) e^{i[\sum_{j=1}^n (\omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{x}_j})]t_i} \Psi_N^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n)$$

Compte tenu des résultats suivants établis dans l'appendice II :

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} e^{i[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] t_i} \Psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) = 0$$

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} e^{i[\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i})] t_i} \varphi_N^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) = c \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)$$

l'opérateur $\mathcal{V}_1(t)$ est représenté par la matrice d'éléments

$$(169) \langle k_1 \dots k_n | \mathcal{V}_1(t) | \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle = c \sqrt{n!} \varphi_N(\lambda_1 \dots \lambda_n, k_1 \dots k_n) e^{i[\sum_{j=1}^n (\omega_{\vec{k}_j} - \omega_{\vec{\lambda}_j})] t}$$

et sur cette expression le passage à la limite $t \rightarrow -\infty$ donne

$$(170) \mathcal{V}_1(-\infty) = c^2 I.$$

L'opérateur $\mathcal{V}_2(t)$ est représenté par une matrice dont les seuls éléments non nuls sont d'indices $(n+1, n)$ et ont pour expressions

$$(171) \langle k_1 \dots k_{n+1} | \mathcal{V}_2(t) | \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \sqrt{n!} \sqrt{(n+1)!} \lambda \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n e^{i[\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i})] t_i} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{k}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} + \Delta m] t} \phi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{n+1}) \\ & + \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \sqrt{n!} \sqrt{(n+1)!} \lambda \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_{n+1} e^{i[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m] t_i} \Psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} (\omega_{\vec{k}_j} - \omega_{\vec{x}_j})] t} \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{n+1}) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de l'appendice II, il vient

$$(172) \langle k_1 \dots k_{n+1} | \mathcal{V}_2(t) | \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle = \sqrt{(n+1)!} \lambda c \phi_N(\lambda_1 \dots \lambda_n, k_1 \dots k_{n+1}) e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{k}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m] t}$$

$$(173) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{V}_2(t) = 0 .$$

Par des calculs analogues on montre que les opérateurs $\mathcal{N}_1(t)$, $\mathcal{N}_2(t)$ sont représentés par des matrices dont les seuls éléments non nuls sont

$$(174) \quad \langle k_1 \dots k_{n-1} | \mathcal{N}_1(t) | \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle = \sqrt{(n-1)!} \lambda \Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_{n-1}) e^{i[\sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} - \Delta m]t}$$

$$(175) \quad \langle k_1 \dots k_n | \mathcal{N}_2(t) | \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle = \sqrt{n!} \Psi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n) e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i})t}$$

Les passages à la limite $t \rightarrow -\infty$ opérés sur ces deux expressions donnent respectivement

$$(176) \quad \mathcal{N}_1(-\infty) = 0$$

$$(177) \quad \mathcal{N}_2(-\infty) = I$$

Reportons les valeurs de $\mathcal{V}_1(t)$, $\mathcal{V}_2(t)$, $\mathcal{N}_1(t)$, $\mathcal{N}_2(t)$ [(169), (172), (174), (175)] dans l'expression (167) de $U(t - \infty)$, il vient

$$(178) \quad U(t - \infty) = I + [cV_1(t) - I] \Psi_V^* \Psi_V + cV_2(t) \Psi_N^* \Psi_V + N_1(t) \Psi_V^* \Psi_N \\ + N_2(t) \Psi_N^* \Psi_N + [2I - cV_1(t) - N_2(t)] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

qui n'est plus un opérateur unitaire puisque

$$U^\dagger(t - \infty) U(t - \infty) = I + [c^2 - I] \Psi_V^* \Psi_V + [1 - c^2] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

Il ne nous est plus possible de vérifier la "condition initiale"

$U(-\infty - \infty) = I$. En utilisant (178), (170), (173), (176), (177), nous voyons en effet que

$$U(-\infty - \infty) = I + (C^2 - I) \Psi_V^* \Psi_V + [1 - C^2] \Psi_V^* \Psi_N^* \Psi_N \Psi_V$$

Ainsi dans le cas du modèle de Lee, la convergence faible et la convergence forte n'ayant pas lieu simultanément, il est impossible de se définir $U(t - \infty)$ unitaire satisfaisant [(150) à (152)], et par conséquent la matrice S , dans l'espace de Fock des particules libres, à moins naturellement d'introduire une méthode adiabatique, procédé que nous voulons éviter.

2 La matrice S .

Nous allons exposer le moyen de se définir un opérateur S dans "l'espace de Fock des particules physiques" .

A cet effet rappelons que les opérateurs "in" et "out" s'expriment dans l'espace de Fock des particules physiques, mais que nous avons de "mauvaises définitions" pour $\Psi_{V in}^*$, $\Psi_{N in}^*$ et aussi pour $\Psi_{V out}^*$, $\Psi_{N out}^*$; observons cependant que

$$\Psi_{V in}^* |0\rangle = \Psi_{V out}^* |0\rangle = C \Psi_V^* |0\rangle$$

$$\Psi_{N in}^* |0\rangle = \Psi_{N out}^* |0\rangle = \Psi_N^* |0\rangle$$

$$\Psi_{V in}^* \Psi_{N in}^* |0\rangle = \Psi_{V out}^* \Psi_{N out}^* |0\rangle = \Psi_V^* \Psi_N^* |0\rangle$$

(dans cette dernière relation l'ordonnancement des nucléons est fixé) et que

$$\left[a_{\vec{k}_1 \text{ out}}^{\vec{x}}, a_{\vec{k}_2 \text{ out}}^{\vec{x}} \right]_- = 0 \quad \text{et} \quad \left[a_{\vec{k}_1 \text{ out}}^{\vec{x}}, a_{\vec{k}_2 \text{ out}}^{\vec{x}} \right]_- = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) .$$

(voir chapitre II, paragraphes 3 et 4)

Suite à ces remarques, pour obtenir un opérateur S physiquement acceptable quant à la forme :

$$S = I + S^1 \psi_v^* \psi_v + S^2 \psi_N^* \psi_v + S^3 \psi_v^* \psi_N + S^4 \psi_N^* \psi_N + S^5 \psi_v^* \psi_N^* \psi_N \psi_v ,$$

quant à la symétrie, à la conservation des énergies, à l'unitarité, nous commençons par définir l'état d'un nucléon physique (soit $\psi_v^* |0\rangle$, $\psi_N^* |0\rangle$) et de deux nucléons physiques:

($\psi_v^* \psi_N^* |0\rangle$) . L'opérateur S est l'opérateur qui, appliqué au vecteur obtenu en faisant agir $a_{\vec{k}_1 \text{ in}}^{\vec{x}} \dots a_{\vec{k}_n \text{ in}}^{\vec{x}}$ sur l'état d'un nucléon physique, conduit à l'expression de $a_{\vec{k}_1 \text{ out}}^{\vec{x}} \dots$

$a_{\vec{k}_n \text{ out}}^{\vec{x}}$ agissant sur l'état du même nucléon physique .

($a_{\vec{k} \text{ in}}^{\vec{x}}$ et $a_{\vec{k} \text{ out}}^{\vec{x}}$ sont donnés par [(88) à (94)]) .

Ainsi les opérateurs S^1, S^2, S^3, S^4, S^5 sont représentés dans l'espace de Fock des particules physiques $\mathcal{O}$ par des matrices dont les éléments qui permettent de vérifier par exemple les relations

$$a_{\vec{k} \text{ out}}^{\vec{x}} \psi_v^* |0\rangle = S a_{\vec{k} \text{ in}}^{\vec{x}} \psi_v^* |0\rangle$$

$$a_{\vec{k} \text{ out}}^{\vec{x}} \psi_N^* |0\rangle = S a_{\vec{k} \text{ in}}^{\vec{x}} \psi_N^* |0\rangle$$

$$a_{\vec{k} \text{ out}}^{\vec{x}} \psi_v^* \psi_N^* |0\rangle = S a_{\vec{k} \text{ in}}^{\vec{x}} \psi_v^* \psi_N^* |0\rangle \quad \text{sont :}$$

$$\langle 0 | A_{\vec{x}} | S^1 | A_{\vec{\lambda}}^* | 0 \rangle = \lambda^2 2i\pi \delta(\omega_{\vec{x}} - \omega_{\vec{\lambda}}) \int d\vec{\ell} \varphi_N^*(\vec{x}, \vec{\ell}) \phi_N(\vec{\ell}) \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}}}}$$

$$\langle 0 | A_{\vec{x}_1} A_{\vec{x}_2} \frac{1}{\sqrt{2!}} | S^2 | A_{\vec{\lambda}}^* | 0 \rangle = \lambda^2 2i\pi \delta(\omega_{\vec{x}_1} + \omega_{\vec{x}_2} + \Delta m - \omega_{\vec{\lambda}}) \sqrt{2!} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}}}} \times \\ \times \int d\vec{\ell} \varphi^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{\ell}) \phi_N(\vec{\ell})$$

$$\langle 0 | S^3 | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | A_{\vec{x}} | S^4 | A_{\vec{\lambda}}^* | 0 \rangle = 2i\pi \delta(\omega_{\vec{x}} - \omega_{\vec{\lambda}}) \lambda^2 \psi^*(\vec{x}) \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}}}}$$

Ainsi dans le cas du modèle de Lee, et à l'image de ce qui se passe pour le modèle de Wentzel, on a pu se définir un espace de Fock des particules physiques V, N, Θ . Les opérateurs création et annihilation de ces particules physiques permettent de donner à l'Hamiltonien total H la forme d'un Hamiltonien libre H_0 , les opérateurs "ingoing" étant reliés aux créateurs et annihilateurs des particules physiques par les relations "les plus favorables".

Il est à remarquer que $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in}$, très probablement parce que la particule Θ est relativiste, est confondu avec le créateur de la particule physique correspondante et que $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ in}$ et $a_{\vec{k}}^{\pm} \text{ out}$ vérifient les bonnes relations de commutation. Par contre les

$\psi_{\vec{v}}^* \text{ in}, (\psi_{\vec{v}}^* \text{ out}), \psi_{\vec{N}}^* \text{ in}, (\psi_{\vec{N}}^* \text{ out})$ ont perdu les bonnes

relations d'anticommutation. Malgré cet inconvénient et grâce aux bonnes propriétés des opérateurs "ingoing", "outgoing" relativistes, nous donnons dans "l'espace de Fock des particules physiques" l'expression d'une matrice S physiquement accepta-

ble.

Cette idée due à M. G. Rideau de construire la matrice S en utilisant comme espace de représentation "l'espace de Fock des particules physiques" défini au chapitre II peut sembler voisine de celle exposée par Van Hove ([8] : "la méthode des états stationnaires"), mais en réalité elle en diffère totalement :

Alors que notre espace de représentation de l'opérateur S est un espace de Fock, l'espace de représentation de Van Hove a perdu cette propriété; Van Hove se définit non pas des créateurs et annihilateurs des particules physiques, mais les états des particules physiques. Les vecteurs de base de l'espace de représentation utilisé par Van Hove sont :

$$\Psi_0, \hat{O}_k \Psi_0, \hat{O}_{k_1} \dots \hat{O}_{k_n} \Psi_0, \dots$$

où Ψ_0 est le vide physique, $\hat{O}_k \Psi_0$ l'état à une particule physique obtenu en faisant agir sur le vide physique un opérateur $\hat{O}_k$ défini en termes de diagrammes connexes avec à droite une seule ligne extérieure correspondant à une particule libre d'impulsion $\vec{k}$ et à gauche plusieurs lignes extérieures. Il définit de même $\hat{O}_{k_1} \dots \hat{O}_{k_n} \Psi_0$, "états stationnaires à plusieurs particules physiques". Les vecteurs de base forment en général une base complète mais ne sont pas orthogonaux et les $\hat{O}_k$ commutent ou anticommutent mais ne vérifient plus les relations de commutation et d'anticommutation valables pour les champs libres. C'est dans un tel espace qu'il construit la matrice S en recherchant la "représentation la plus naturelle des états asymptotiques à plusieurs particules". Pour ce faire, il démontre qu'une solution générale $\Psi(t)$ de l'équation de Schrödinger correspondant à une superposition d'états stationnaires perturbés à plusieurs particules physiques peut être approchée asymptotiquement par des états $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\Psi(t) - \varphi^-(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Psi(t) - \varphi^+(t)\| = 0 \quad \text{où}$$

$$\varphi^\pm(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \int d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}_n \exp[-i(E_{\vec{k}_1} + \dots + E_{\vec{k}_n})t] C_n^\pm(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \hat{O}_{\vec{k}_1} \dots \hat{O}_{\vec{k}_n} \Psi_0$$

La relation entre les deux états asymptotiques donnant la matrice S . Cette condition asymptotique pour obtenir une matrice S est remplacée chez nous par la définition "la plus favorable" des opérateurs "ingoing", définition que l'on peut très probablement préciser lorsque toutes les particules sont relativistes. Mais tant que nous n'avons pas répondu par l'affirmative à la question : Les opérateurs création des particules physiques sont-ils confondus avec les opérateurs création "ingoing" correspondants dans le cas d'un modèle relativiste ?, question posée à la fin du chapitre II, on peut penser qu'il y a incompatibilité entre "traiter un modèle" et désirer obtenir des opérateurs "ingoing" et "outgoing" ayant les relations de commutation et d'anticommutation des opérateurs des particules libres.

On peut évidemment obtenir de tels opérateurs "ingoing" et "outgoing" et une matrice S physiquement acceptable en abandonnant le formalisme Hamiltonien et en ayant recours à la méthode dite axiomatique proposée par Wightman [9]. Cette méthode a été reprise par Haag [2] qui a modifié l'axiome IV, en l'occurrence la condition asymptotique de Lehmann, Symanzik, Zimmermann (méthode de convergence faible) [5], pour le remplacer par le concept d'opérateur "presque local" lui permettant d'introduire la convergence forte.

B I B L I O G R A P H I E

- 1 Dixmier "Algèbres de Von Neumann. Cahiers Scient. Fasc. XXV
 - 2 Haag Colloque de Lille (1957)

Haag Physical Review t 112 - 1958 - p. 669
 - 3 Heisenberg Nuclear Physics t 4 - 1957 - p.532
 - 4 Källen - Pauli Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 30 - 1955 - n°7
 - 5 Lehmann Symanzik Zimmermann Nuovo Cimento t 1 - 1955 - p. 205
 - 6 Rideau Ann. Inst. Poincaré t XVII - 1961 - p. 91
 - 7 Rideau, Chevalier : Nuovo Cimento t 10 - 1958 - p.228
 - 8 Van Hove : Physica t 21 - 1955 - p.517
: Physica t 21 - 1955 - p.901
: Colloque de Lille (1957) .
 - 9 Wightman : Colloque de Lille (1957) .
-

APPENDICE MATHEMATIQUE.

I. Vérification des relations (18), (19), (20), (21).

Vérification de (18).

(28) et (29) nous permettent d'écrire la relation $V_1^* V_1 + V_2^* V_2 = I$ sous la forme matricielle suivante :

$$(1) \quad n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) + \\ + (n+1)! \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) = \langle \chi_1 \dots \chi_n | I | \Lambda_1 \dots \Lambda_n \rangle$$

En utilisant (32), le second terme du premier membre de cette égalité s'écrit

$$(2) \quad (n+1)! \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) = \\ \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) \\ \times \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\Lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1})$$

où nous pouvons grouper les termes de façon à obtenir

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\Lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^2(\omega_{\vec{l}_j})}{2\omega_{\vec{l}_j}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) +$$

$$+ \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon}$$

$$\times \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1})$$

Si dans le premier terme de cette dernière expression, nous faisons la transformation suivante : $\vec{l}_j \rightarrow \vec{k}$ et $\vec{l}_{n+1} \rightarrow \vec{l}_j$ nous obtenons $(n+1)$ fois la même intégrale et si de plus nous tenons compte de (34), il vient

$$(2') \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon}$$

$$\times \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^2(\omega_{\vec{l}_j})}{2\omega_{\vec{l}_j}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{n!} \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} + \Delta m)^2} \mathcal{P}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$$

$$- \frac{n!}{(n!)^2} \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$$

$$- \frac{n!}{(n!)^2} \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \varphi'^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$$

$$+ \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right\}$$

Nous pouvons également écrire

$$\begin{aligned}
 (2^2) & \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \frac{f(\omega_{\vec{e}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_i}}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1}) = \\
 & = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \frac{f(\omega_{\vec{e}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_i}}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1}) \\
 & - \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \frac{f(\omega_{\vec{e}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_i}}} \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1})
 \end{aligned}$$

2^2 et le quatrième terme du second membre de 2^1 ont été obtenus en utilisant la décomposition

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} = \\
 & = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \right]
 \end{aligned}$$

Si dans le second terme de 2^2 , on fait la transformation $\vec{l}_j \rightarrow \vec{l}_i$,
 $\vec{l}_i \rightarrow \vec{l}_j$, il vient pour le second membre de 2^2

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \times$$

$$\times \left[\int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{-1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\chi}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \sum_{i \neq j} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi^*(\vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1}) \right. \\ \left. - \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi^*(\vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \sum_{i \neq j} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1}) \right]$$

qui après les transformations $\vec{l}_j \rightarrow \vec{k}$ et $\vec{l}_{n+1} \rightarrow \vec{l}_j$ donne

$$\frac{n!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \times$$

$$\times \left[\int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\chi}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi^*(\vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{k} \dots \vec{l}_{n+1}) \right. \\ \left. - \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi^*(\vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{k} \dots \vec{l}_{n+1}) \right]$$

$$\frac{n!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \left[\frac{1}{n!} \frac{1}{n!} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) + \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \right] \times$$

$$\times \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\chi}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\chi}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \right] \varphi^*(\vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{n!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\chi_i}^{\rightarrow}) + i\varepsilon} \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} \rho(\vec{\chi}_1, \dots, \vec{\chi}_n) + \varphi'(\vec{\chi}_1, \dots, \vec{\chi}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) \right] \times \\
 & \times \sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) \\
 & - \sqrt{n!} \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\lambda_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) - i\varepsilon} \right] \varphi'(\vec{\chi}_1, \dots, \vec{\chi}_n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n) \\
 & - \sqrt{n!} \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\chi_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{\chi}_1, \dots, \vec{\chi}_n) \\
 & + \frac{n!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\chi_i}^{\rightarrow}) + i\varepsilon} \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n \varphi'(\vec{\chi}_1, \dots, \vec{\chi}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) \varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) \times \\
 & \times \left[\sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) - i\varepsilon} \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \right]
 \end{aligned}$$

Après utilisation des égalités suivantes

$$\begin{aligned}
 (\alpha^1) \quad & \sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) - i\varepsilon} \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - \delta m_v - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\chi_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) - i\varepsilon} \\
 (\alpha^2) \quad & \sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - \delta m_v - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_k^{\rightarrow})^2}{2\omega_k^{\rightarrow}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\lambda_i}^{\rightarrow} - \omega_{\ell_i}^{\rightarrow}) - (\omega_k^{\rightarrow} + \Delta m) + i\varepsilon}
 \end{aligned}$$

On obtient finalement pour (2²)

$$\begin{aligned}
 (2^2) \quad & \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{-1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\
 & \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+1}) \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+1}) = \\
 & = -\sqrt{n!} \left[-1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \right] \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) \\
 & - \sqrt{n!} \left[1 - \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} + \Delta m} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \\
 & - n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \\
 & + n! \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \times \\
 & \times \left[\int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} - \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \right]
 \end{aligned}$$

En additionnant (2¹) et (2²)

$$\begin{aligned}
 & (n+1)! \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+1}) = \\
 & = -\sqrt{n!} \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) - \sqrt{n!} \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \\
 & - n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) + \frac{\lambda^2}{n!} \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} + \Delta m)^2} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)
 \end{aligned}$$

En reportant dans le premier membre de (1) et en tenant compte de (34), nous obtenons finalement

$$n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) +$$

$$\begin{aligned}
 & + (n+1)! \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}) \Phi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}) = \\
 & = \left[1 + \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\vec{\omega}_k)}{2\omega_k} \frac{1}{(\omega_k + \Delta m)^2} \right] \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n)
 \end{aligned}$$

Nous voyons que (1) est effectivement vérifié à condition de remplacer (34) par (42).

Vérification de (19), (20), (21) .

Pour vérifier (19) (et simultanément (21) puisqu'elle en est l'adjointe) dont l'expression matricielle est

$$(n+1)! \lambda \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}) \Psi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}) + n! \lambda \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) \Phi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n)$$

Il suffit d'appliquer la méthode précédente au calcul de

$$n! \lambda \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) \Phi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n)$$

De même le calcul de $n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n)$

toujours par la même méthode, nous permet de vérifier

$$(n+1)! \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+1} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}) \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}) + n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) \Psi(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) =$$

$$= \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \mathbb{I} | \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n \rangle \quad \text{traduction matricielle de (20)}$$

II. Calcul de

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m]t} \Psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)$$

D'après (70), cette expression peut s'écrire

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{i[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m]t}}{\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m - i\varepsilon} \Psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (i) \int_{-\infty}^t du e^{i[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} + \Delta m - i\varepsilon]u} \Psi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n+1}, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) = 0$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} \varphi_n^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)$$

D'après (67), il vient

$$e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) t} c \left[\frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{n!}} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + \frac{\varphi_n^{**}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - i\varepsilon} \right]$$

$$= c \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{n!}} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) + \lim_{t \rightarrow -\infty} c i \int_{-\infty}^t du e^{i \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) - i\varepsilon] u} \varphi_n^{**}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)$$

$$= c \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{n!}} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n)$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m]t} \Phi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$$

En tenant compte de (65) et (67), nous sommes amenés à calculer :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} c \frac{e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m]t}}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(n+1)! \sqrt{n!}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \mathcal{P}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_{n+1}) + \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \frac{\varphi''(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_{n+1})}{\sum_{j=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} + \omega_{\vec{x}_i} + i\varepsilon} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} c \frac{1}{\sqrt{n!} (n+1)!} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \mathcal{P}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_{n+1}) (-i) \int_{-\infty}^t e^{i[\omega_{\vec{x}_i} + \Delta m - i\varepsilon]u} du$$

$$+ \lim_{t \rightarrow -\infty} c \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(\omega_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \varphi''(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_{n+1}) \frac{1}{\omega_{\vec{x}_i} + \Delta m} \times$$

$$\times \left[(-i) \int_{-\infty}^t du e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m - i\varepsilon]u} + e^{i(\omega_{\vec{x}_i} + \Delta m)t} (i) \int_{-\infty}^t du e^{i[\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - i\varepsilon]u} \right]$$

expression sur laquelle le passage à la limite $t \rightarrow -\infty$ est immédiat.

III. Calcul de

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-i\omega_k^* t} \langle 0 | A_{\vec{x}_1}^* \dots A_{\vec{x}_n}^* \frac{1}{\sqrt{n!}} | e^{iHt} \{ V_1(AA^*) A_k^* V_1(AA^*) + V_2(AA^*) A_k^* V_2(AA^*) - A_k^* \} e^{iHt} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} A_{\vec{x}_1}^* \dots A_{\vec{x}_{n-1}}^* | 0 \rangle$$

qui s'écrit

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{k}}]t} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} P(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{k}) + \right. \\ \left. + \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n d\vec{\ell}'_1 \dots d\vec{\ell}'_{n-1} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}'_1, \dots, \vec{\ell}'_{n-1}) \sum_{i=1}^n \delta(\vec{k} - \vec{\ell}_i) P(\frac{\vec{\ell}_1}{\vec{\ell}'_1}, \dots, \frac{\vec{\ell}_n}{\vec{\ell}'_{n-1}}) + \right. \\ \left. + \lambda^2 \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_{n+1} d\vec{\ell}'_1 \dots d\vec{\ell}'_n \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{n+1}) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}'_1, \dots, \vec{\ell}'_n) \sum_{i=1}^n \delta(\vec{k} - \vec{\ell}_i) P(\frac{\vec{\ell}_1}{\vec{\ell}'_1}, \dots, \frac{\vec{\ell}_n}{\vec{\ell}'_{n-1}}) \right\}$$

et après intégration par rapport à $\vec{\ell}_i$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{x}_j} - \omega_{\vec{k}}]t} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{\lambda}_{n-1}}{\vec{x}_{n-1}}, \frac{\vec{k}}{\vec{x}_n}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_i \dots d\vec{\ell}_n d\vec{\ell}'_1 \dots d\vec{\ell}'_{n-1} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_i, \vec{k}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}'_1, \dots, \vec{\ell}'_{n-1}) P(\frac{\vec{\ell}_1}{\vec{\ell}'_1}, \dots, \frac{\vec{\ell}_n}{\vec{\ell}'_{n-1}}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^2 \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_i \dots d\vec{\ell}_{n+1} d\vec{\ell}'_1 \dots d\vec{\ell}'_n \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_i, \vec{k}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_{n+1}) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}'_1, \dots, \vec{\ell}'_n) P(\frac{\vec{\ell}_1}{\vec{\ell}'_1}, \dots, \frac{\vec{\ell}_n}{\vec{\ell}'_n}) \right\}$$

En intégrant par rapport aux $\vec{\ell}_i$ ($i = 1 \dots n-1$ dans le second terme et $i = 1 \dots n$ dans le dernier terme) et en tenant compte des symétries, il vient

$$(a) \quad t \rightarrow +\infty \quad e^{i[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}}]t} \left[-\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \mathcal{P}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{k}) + \right. \\ \left. + n! \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_{n-1} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{n-1}, \vec{k}) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{n-1}) + \right. \\ \left. + (n+1)! \lambda^2 \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n, \vec{k}) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) \right]$$

Dans cette dernière expression intervient le terme

$$(b) \quad (n+1)! \lambda^2 \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n, \vec{k}) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n)$$

que nous pouvons réexprimer de la façon suivante en tenant compte de (65)

$$\lambda^2 (n-1)! \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\ell}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\ell}_i} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ \times \sum_{i=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{\ell}_i})}{2\omega_{\vec{\ell}_i}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \vec{k}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n) \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_i, \dots, \vec{\ell}_n) + \\ + \lambda^2 (n-1)! \int d\vec{\ell}_1 \dots d\vec{\ell}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{\ell}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\ell}_i} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ \times \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{\ell}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\ell}_j}}} \varphi_N(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_j, \dots, \vec{\ell}_n) \left[\frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n) + \sum_{i \neq j} \frac{f(\omega_{\vec{\ell}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\ell}_i}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{i-1}, \vec{k}, \vec{\ell}_{i+1}, \dots, \vec{\ell}_n) \right]$$

et nous appellerons respectivement b^1 et b^2 le premier et le second terme de b . En utilisant (67) où nous posons

$$\frac{\varphi''(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} = \varphi'(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n), \text{ et la décomposition}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \vec{\omega}_{\vec{l}_i}) - (\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{l}_i} - \Delta m + i\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \vec{\omega}_{\vec{k}} - i\varepsilon} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \vec{\omega}_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \vec{\omega}_{\vec{l}_i}) - (\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \right]$$

on a pour b¹

$$(b^1) \lambda^2 (n-1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \vec{\omega}_{\vec{l}_i}) - (\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{l}_i} - \Delta m + i\varepsilon} \times$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{l}_i})}{2\omega_{\vec{l}_i}} \varphi_N^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \varphi_N(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) =$$

$$= \lambda^2 c^2 \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \int d\vec{l} \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{l}})}{2\omega_{\vec{l}}} \frac{1}{(\omega_{\vec{l}} + \Delta m)^2} P\left(\frac{\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}}{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}, \vec{k}\right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \vec{\omega}_{\vec{k}} - i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \vec{\omega}_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{l}_i})}{2\omega_{\vec{l}_i}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{n!}} P\left(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n}{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}\right) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{1}{(n-1)!} P\left(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n}{\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}}\right) \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) +$$

$$+ \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) \left. \right]$$

$$- \frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{\omega}_{\vec{\lambda}_j} - \vec{\omega}_{\vec{k}} - i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \vec{\omega}_{\vec{l}_i}) - (\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{l}_i})}{2\omega_{\vec{l}_i}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{n!}} P\left(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n}{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}\right) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{1}{(n-1)!} P\left(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n}{\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}}\right) \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) +$$

$$+ \varphi'(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \varphi'(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) \left. \right]$$

et en tenant compte de la même décomposition, il vient pour b^2

$$\begin{aligned}
 (b^2) \quad & \lambda^2 (n-1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{A}_j} - \sum_{l=1}^n \omega_{\vec{l}_l} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\
 & \times \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_j, \dots, \vec{l}_n) \left[\frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) + \sum_{i \neq j} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_i, \vec{k}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n) \right] \\
 & = \frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{A}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{A}_j} - \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\
 & \times \left[\frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_j, \dots, \vec{l}_n) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_j, \dots, \vec{l}_n) \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_i, \vec{k}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n) \right] \\
 & = \frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{A}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \times \\
 & \times \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_j, \dots, \vec{l}_n) \left[\frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) + \sum_{i \neq j} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_i, \vec{k}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n) \right]
 \end{aligned}$$

où le terme

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{A}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_j, \dots, \vec{l}_n) \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi_N^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_i, \vec{k}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n)
 \end{aligned}$$

peut s'écrire en posant $\vec{l}_i \rightarrow \vec{k}$

$$\frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i \dots d\vec{l}_n \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \times \right.$$

$$\left. \int d\vec{x} \frac{f(\omega_{\vec{x}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}}}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - (\omega_{\vec{x}} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{j \neq i} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{x} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_n) \right)$$

En utilisant les symétries, les équations (66), (67) et la décomposition (α^2) [Appendice mathématique I], Cette dernière expression s'écrit

$$\frac{c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i \dots d\vec{l}_n \right) \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n!} P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) + \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \right]$$

$$\times \left[\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - \Delta m - \lambda^2 \left(d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right) \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{l}_n) \right]$$

De même le terme

$$\frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon)} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{x}_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) - i\varepsilon} \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \times \right.$$

$$\left. \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \vec{l}_n) \left[\frac{f(\omega_{\vec{x}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}}}} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) + \sum_{i' \neq j} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i'}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i'}}}} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \right] \right)$$

peut s'écrire en y posant $\vec{l}_j = \vec{x}$

$$\frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \sum_{j=1}^n \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_j \dots d\vec{l}_n \varphi(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_n) \times \right.$$

$$\left. \times \int d\vec{x} \frac{f(\omega_{\vec{x}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j' \neq j} \omega_{\vec{l}_{j'}} - \omega_{\vec{k}} - (\omega_{\vec{x}} + \Delta m) - i\varepsilon} \times \right)$$

$$X \left[\frac{f(\vec{\omega}_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{j-1}, \vec{x}, \vec{l}_{j+1}, \dots, \vec{l}_n) + \sum_{i \neq j} \frac{f(\vec{\omega}_i)}{\sqrt{2\omega_i}} \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{j-1}, \vec{k}, \vec{l}_{j+1}, \dots, \vec{l}_i, \vec{x}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n) \right]$$

ou encore en utilisant la méthode précédente

$$\frac{C^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{x_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{l}_j} - \omega_k - i\varepsilon} X$$

$$X \sum_{j=1}^n \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_j \dots d\vec{l}_n \right) \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \left[\mathcal{P}(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}) + \varphi(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}, \vec{l}_j, \vec{l}_n) \right] \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{j-1}, \vec{k}, \vec{l}_{j+1}, \dots, \vec{l}_n) X$$

$$X \left[\sum_{i=1}^n \omega_{x_i} - \sum_{j \neq i} (\omega_{\vec{l}_j} - \omega_k - \delta m_v - \lambda^2) \frac{d\vec{l}_j}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{f(\vec{\omega}_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_{x_i} - \sum_{j \neq i} (\omega_{\vec{l}_j} - \omega_k - (\omega_k + \Delta m) - i\varepsilon)} \right]$$

D'où finalement

$$(b^2) \lambda^2 (n-1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{x_i} - \omega_{\vec{l}_i}) - (\omega_k + \Delta m) - i\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \omega_{x_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon}$$

$$X \sum_{j=1}^n \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi_N(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{l}_j, \vec{l}_n) \left[\frac{f(\vec{\omega}_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i \neq j} \frac{f(\vec{\omega}_i)}{\sqrt{2\omega_i}} \varphi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i-1}, \vec{k}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n) \right]$$

$$= \frac{C^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{x_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{l}_j} - \omega_k - i\varepsilon} X$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \frac{f(\vec{\omega}_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \sum_{j=1}^n \frac{f(\vec{\omega}_j)}{\sqrt{2\omega_j}} \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_n) \\
 & + \sum_{i=1}^n \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i \dots d\vec{l}_n \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{n!} P\left(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n}{\vec{x}_1 \dots \dots \vec{x}_n}\right) + \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n) \right] \\
 & \times \left[\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\Lambda}_j} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - \delta m_v - \lambda^2 \left(dk \frac{f(\vec{\omega}_k)}{2\omega_k} \right) \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{\Lambda}_i} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - (\omega_k + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) \\
 & - \sum_{i=1}^n \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_i \dots d\vec{l}_n \left[\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{1}{(n-1)!} P\left(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n}{\vec{\Lambda}_1 \dots \dots \vec{\Lambda}_{n-1}}\right) + \varphi(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_i \dots \vec{l}_n) \right] \times \\
 & \times \left[\sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - \omega_k - \delta m_v - \lambda^2 \left(dk \frac{f(\vec{\omega}_k)}{2\omega_k} \right) \frac{1}{\sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - \sum_{i' \neq i} \omega_{\vec{l}_{i'}} - \omega_k - (\omega_k + \Delta m) - i\varepsilon} \right] \times \\
 & \times \varphi^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \vec{k} \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_n)
 \end{aligned}$$

Si dans (a) nous remplaçons (b) par sa nouvelle expression (b¹) + (b²) et si on tient compte de la forme de $\varphi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n)$ (Expression (34)) il vient

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \pm \infty} e^{i \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{\Lambda}_j} - \omega_k \right] t} & \left[- \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} P\left(\frac{\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-1} \vec{k}}{\vec{x}_1 \dots \dots \vec{x}_n}\right) + \right. \\
 & + n! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n-1} \varphi_N^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1} \vec{k}) \varphi_N(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}) + \\
 & \left. + (n+1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi_N^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n \vec{k}) \varphi_N(\vec{\Lambda}_1 \dots \vec{\Lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{y}_j} - \omega_{\vec{k}} \right] t} \left[- \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_{n-1} & \vec{k} \\ \vec{x}_1 & \dots & \dots & \vec{x}_n \end{matrix} \right) + \right. \\
 &+ c^2 \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_{n-1} & \vec{k} \\ \vec{x}_1 & \dots & \dots & \vec{x}_n \end{matrix} \right) + \frac{c^2 \lambda^2}{\sqrt{n!} \sqrt{(n-1)!}} \int d\vec{k} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} + \Delta m)^2} \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_{n-1} & \vec{k} \\ \vec{x}_1 & \dots & \dots & \vec{x}_n \end{matrix} \right) \\
 &+ \frac{\lambda^2 c^2 (n-1)!}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{y}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{y}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \varphi \left(\begin{matrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n, \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_n \end{matrix} \right) \times \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^n \frac{f(\omega_{\vec{y}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{y}_j}}} \varphi \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_j & \dots & \vec{l}_n \end{matrix} \right) \Big] = \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{i \left[\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{y}_j} - \omega_{\vec{k}} \right] t}}{\sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{\vec{y}_j} - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} n! \lambda^2 \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \times \\
 &\quad \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_n \varphi_N \left(\begin{matrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n, \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_n \end{matrix} \right) \mathcal{P}_N \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_{n-1}, \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_n \end{matrix} \right)
 \end{aligned}$$

ceci d'après (65), la valeur de c étant donnée dans (67). D'où les résultats (88) et (90).

IV. Vérification de (114) $U_{10p}^* U_{10p} + U_{20p}^* U_{20p} = I$.

U_{10p} , U_{20p} sont donnés par (124), (125), (126), (127), (128) pour $i = p$.

Au cours du calcul nous aurons à utiliser l'équation intégrale à laquelle satisfait $\varphi'(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-p}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ obtenue en portant (127) dans (126).

$$\begin{aligned}
 (a) & \left[\sigma_p + \sum_{i=1}^{n-p} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} \right] \left[1 - \lambda^2 \frac{d\vec{f}(\vec{\omega}_p)}{2\omega_{\vec{e}}} \frac{1}{\omega_{\vec{e}} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^{n-p} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - (\omega_{\vec{e}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right] \varphi'(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-p}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \\
 &= \lambda^2 \int \frac{d\vec{f}(\vec{\omega}_p)}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}}}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^{n-p} \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^n \omega_{\vec{x}_j} - (\omega_{\vec{e}} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{x}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_i}}} \varphi'(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_{n-p}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\
 &+ p! \frac{1}{n!} \frac{1}{(n-p)!} \sum_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{x}_{i_1}} + \dots + \omega_{\vec{x}_{i_{p+1}}}] - \Delta m} \frac{\sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{x}_{i_2}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{x}_{i_2}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_2}, \dots, \vec{x}_{i_{p+1}})}{1} \times \\
 &\quad \times \lambda^2 \int \frac{d\vec{f}(\vec{\omega}_p)}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}}}} P \left(\begin{array}{c} \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_{p+1}}, \dots, \vec{x}_n \\ \vec{\lambda}_1, \dots, \dots, \dots, \vec{\lambda}_{n-p} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

ainsi que les décompositions

$$\begin{aligned}
 (b) & \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} = \\
 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \left[\frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \right] \\
 (c) & \left[\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{x}_j} \right] \left[1 - \lambda^2 \frac{d\vec{f}(\vec{\omega}_p)}{2\omega_{\vec{e}}} \frac{1}{\omega_{\vec{e}} + \Delta m} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{x}_j} - (\omega_{\vec{e}} + \Delta m) + i\varepsilon} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \delta m_v - \lambda^2 \int d\vec{l} \frac{(\omega_{\vec{l}})^2}{2\omega_{\vec{l}}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{\lambda}_j} - (\omega_{\vec{l}} + \Delta m) + i\varepsilon}$$

En tenant compte de (124) et (125), (114) s'écrit :

$$\begin{aligned} (d) \quad & (n+p)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \overline{\varphi}^*(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p}) \overline{\varphi}(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p}) + \\ & + (n+p+1)! \lambda^2 \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \overline{\Phi}^*(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p+1}) \overline{\Phi}(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p+1}) = \\ & = \frac{1}{n!} \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_n \\ \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_n \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Le premier terme du premier membre de (d), si on tient compte de (127) est la somme des cinq termes suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1 = & \frac{(p!)^2}{(n+p)! n!} \sum'_{\{i_1 \dots i_p\}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{i_1} \dots d\vec{l}_{i_p} \dots d\vec{l}_{n+p} \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_{i_1} & \dots & \vec{l}_{i_p} & \dots & \vec{l}_{n+p} \\ \vec{\lambda}_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vec{\lambda}_n \end{matrix} \right) \times \\ & \times \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_{i_1} & \dots & \vec{l}_{i_p} & \dots & \vec{l}_{n+p} \\ \vec{\lambda}_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vec{\lambda}_n \end{matrix} \right) \int d\vec{l}_{i_1} \dots d\vec{l}_{i_p} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) \end{aligned}$$

mais nous avons $\frac{(n+p)!}{n! p!}$ manières d'isoler p termes de (n+p)

termes, il s'ensuit

$$\mathcal{P}^1 = \frac{1}{n!} \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_n \\ \vec{\lambda}_1 & \dots & \vec{\lambda}_n \end{matrix} \right) p! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_p \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_p) \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_p)$$

$$\mathcal{P}^2 = \frac{(p!)^2}{(n+p)! p!} \sum'_{\{i_1 \dots i_p\}} \sum'_{\{j_1 \dots j_p\}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) \mathcal{P} \left(\begin{matrix} \vec{l}_1 & \dots & \vec{l}_{i_1} & \dots & \vec{l}_{i_p} & \dots & \vec{l}_{n+p} \\ \vec{\lambda}_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vec{\lambda}_n \end{matrix} \right) \times$$

$\{i_1 \dots i_p\} \neq \{j_1 \dots j_p\}$

$$\times \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{j_p}}{\vec{\lambda}_{j_p}} \dots \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{\lambda}_{n+p}})$$

$$\varphi^3 = \frac{p!}{\sqrt{n!}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{j_p}}{\vec{\lambda}_{j_p}} \dots \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{\lambda}_{n+p}}) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p})$$

$$\varphi^4 = \frac{p!}{\sqrt{n!}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{j_p}}{\vec{\lambda}_{j_p}} \dots \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{\lambda}_{n+p}}) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p})$$

$$\varphi^5 = (n+p)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p}) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p})$$

et en tenant compte de (127) et (128), le second terme du premier membre de (d) est la somme des quatre termes

$$\begin{aligned} \Phi I &= \frac{\lambda^2 (p!)^2}{(n+p+1)! n!} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ &\times \sum_{i=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{e}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_i}}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{j_p}}{\vec{\lambda}_{j_p}} \dots \frac{\vec{l}_i}{\vec{\lambda}_i} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_{n+p+1}}) \times \\ &\times \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ j_1 \dots j_p \neq j}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{j_p}}{\vec{\lambda}_{j_p}} \dots \frac{\vec{l}_i}{\vec{\lambda}_i} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_{n+p+1}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi II &= \frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)! \sqrt{n!}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ &\times \sum_{i=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{e}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_i}}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{j_p}}{\vec{\lambda}_{j_p}} \dots \frac{\vec{l}_i}{\vec{\lambda}_i} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_{n+p+1}}) \times \\ &\times \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+p+1}) \end{aligned}$$

$$\Phi_{III} = \frac{\lambda^2 P!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p+1}) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n, \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+p+1})$$

$$\Phi_{IV} = \frac{\lambda^2 (n+p)!}{(n+p+1)} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n, \vec{l}_i \dots \vec{l}_{n+p+1}) \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n, \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+p+1})$$

Remarque I - Il est utile de remarquer que Φ_{III} s'obtient à partir de Φ_{II} en prenant le conjugué de Φ_{II} , puis en faisant les transformations $\vec{l}_i \rightarrow \vec{x}_i$, $\vec{x}_i \rightarrow \vec{l}_i$.

Les termes de Φ_{II} peuvent se grouper de la façon suivante

$$\Phi_{II} = \frac{\lambda^2 (P!)^2}{(n+p+1)! n!} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{l}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times$$

$$\left[\sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_1}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_1}}}} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}} \dots \vec{l}_{n+p+1}) \times \right.$$

$$\times \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_1}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_1}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}} \dots \vec{l}_{n+p+1})$$

$$+ \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_{p+1}\} \\ \{i_1 \dots i_{p+1}\} \neq \{j_1 \dots j_{p+1}\}}} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_1}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_1}}}} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_{p+1}} \dots \vec{l}_{n+p+1}) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_1}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_1}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_{p+1}} \dots \vec{l}_{n+p+1}) \Big]$$

En utilisant l'équation (98) pour interpréter le premier terme de Φ_I , puis la décomposition (b) donnée au début de cet appendice (IV) pour opérer sur le dernier terme de Φ_I un nouveau classement, il vient, is .

$$\Phi_I = \frac{1}{n!} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) \lambda^{2(p+1)!} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{p+1} \Phi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{p+1}) \Phi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{p+1}) + \Phi_I' + \Phi_I''$$

$$\begin{aligned} \Phi_I' = & \frac{\lambda^2 (P!)^2}{(n+p+1)! n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i} + i\varepsilon)} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{p+1+n} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \right) \times \\ & \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_{p+1}\} \\ \{i_1 \dots i_{p+1}\} \neq \{j_1 \dots j_{p+1}\}}} \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_{p+1}\} \\ \{j_1 \dots j_{p+1}\} \neq \{i_1 \dots i_{p+1}\}}} \sum_{\tau=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_\tau}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_\tau}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_n}) \times \\ & \times \sum_{\tau=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_\tau}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_\tau}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_\tau} \dots \vec{l}_{j_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_n}) \end{aligned}$$

qui peut être sommé de la façon suivante

$$\begin{aligned} \Phi_I' = & \frac{\lambda^2 (P!)^2}{(n+p+1)! n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i} + i\varepsilon)} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \sum_{i=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ \{i_1 \dots i_p\} \neq \{j_1 \dots j_p\}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_n}) \right) \times \\ & \times \left[\sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ \{j_1 \dots j_p\} \neq \{i_1 \dots i_p\}}} \sum_{\tau=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_\tau}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_\tau}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_\tau} \dots \vec{l}_{j_p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_n}) \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{l}_{j_p}}] - \Delta m} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ \{i_1 \dots i_p\} \neq \{j_1 \dots j_p\}}} \left\{ \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_1}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_1}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) + \sum_{\tau=1}^p \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_\tau}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_\tau}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_\tau} \dots \vec{l}_{j_p}) \right\} \times \right. \\ & \left. \times P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{\lambda}_1} \dots \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{\lambda}_n}) \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{l}_{j_p}}] - (\omega_{\vec{l}_{i_1}} - \Delta m)} \right] \end{aligned}$$

ϕ I' s'exprimant à partir de ϕ I en prenant le conjugué de ϕ I', puis en y faisant les transformations $\vec{\lambda}_i \rightarrow \vec{x}_i$, $\vec{x}_i \rightarrow \vec{\lambda}_i$ ($i = 1, 2 \dots n$).

Nous allons donner de ϕ II une nouvelle expression et la marche des calculs qui nous permettent de l'obtenir, il en résultera une nouvelle expression de ϕ III d'après la remarque n°(1). Des calculs analogues nous conduiront à une nouvelle expression de ϕ IV.

Si dans ϕ II nous transformons i en i_{p+1} , et si nous regroupons les termes qui ont en facteur le même permanent, il vient

$$\begin{aligned} \phi_{II} = & \frac{\lambda^2 (P!)}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{g}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ & \times \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_2}})}{z!} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_2}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_n}, \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_n, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \times \\ & \times \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{g}_j})}{j!} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{g}_j}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_n, \vec{l}_{n+p+1}) \end{aligned}$$

En appliquant la décomposition (b)

$$\phi_{II} = \phi_{II'} + \phi_{II''} \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} \phi_{II'} = & \frac{\lambda^2 P!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \times \\ & \times \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_2}})}{z!} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_2}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_n}, \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_n, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \times \end{aligned}$$

$$x \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi'(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+p+1})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II} = & - \frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ & \times \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{\tau=1}^{p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{e}_{i_\tau}})}{\sqrt{n} \omega_{\vec{e}_{i_\tau}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{\chi}_1 \dots \dots \dots \vec{\chi}_n}) \times \\ & \times \sum_{j=1}^{n+p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi'(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{n+p+1}) \end{aligned}$$

Calcul de $\Phi_{II'}$.

$$\begin{aligned} \Phi_{II}' = & \frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{\tau=1}^{p+1} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{e}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \times \\ & \times \left[\frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{e}_{i_\tau}})}{2\omega_{\vec{e}_{i_\tau}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{\chi}_1 \dots \dots \dots \vec{\chi}_n}) \varphi'(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \right. \\ & \left. + \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{e}_{i_\tau}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_{i_\tau}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{\chi}_1 \dots \dots \dots \vec{\chi}_n}) \sum_{j \neq i_\tau} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{e}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_j}}} \varphi'(\sigma_p \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_j \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \right] \end{aligned}$$

$$\Phi_{II}' = \frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{\tau=1}^{p+1} \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{i_\tau} \dots d\vec{l}_{n+p+1} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_{n+p+1}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{x}_{n+p+1}}) \int d\vec{l}_{i_0} \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_0}})}{2\omega_{\vec{l}_{i_0}}} \frac{1}{\sigma_p - [\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_0}} + \vec{\omega}_{\vec{l}_{i_{p+1}}}] - \Delta m} \\
 & + \frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \vec{\omega}_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\}} \frac{1}{\varepsilon_1} \int d\vec{l}_{i_1} \dots d\vec{l}_{i_{p+1}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \vec{\omega}_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \times \\
 & \times \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_0}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_0}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \vec{l}_{i_2}, \dots, \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{x}_{n+p+1}}) \sum_{i_0 \neq i_1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_0}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_0}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_{n+p+1}) \\
 & + \frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \vec{\omega}_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\}} \frac{1}{\varepsilon_1} \int d\vec{l}_{i_1} \dots d\vec{l}_{i_{p+1}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{\vec{x}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \vec{\omega}_{\vec{l}_j} - \Delta m - i\varepsilon} \times \\
 & \times \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_0}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_0}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \vec{l}_{i_2}, \dots, \vec{l}_{i_{p+1}}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{x}_{n+p+1}}) \sum_{j \neq i_1, \dots, i_{p+1}} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{l}_j})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_j}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_{n+p+1})
 \end{aligned}$$

Du premier terme de Φ II' étudions le coefficient de

$$\frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\vec{\omega}_{\vec{\lambda}_i} - \vec{\omega}_{\vec{x}_i}) + i\varepsilon}$$

Il est égal à $\frac{(n+p+1)!}{n! (p+1)!}$ fois l'intégrale

$$\begin{aligned}
 & \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \vec{l}_{i_p}) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{x}_{n+p}}) \times \\
 & \times \int d\vec{k} \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\sigma_p - [\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_1}} + \dots + \vec{\omega}_{\vec{l}_{i_p}}] - [\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m]}
 \end{aligned}$$

ou encore à

$$\begin{aligned}
 & (n+p+1) \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \sum_{\{i_1, \dots, i_p\}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \vec{l}_{i_p}) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+p}) P(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{x}_{n+p}}) \times \\
 & \times \int d\vec{k} \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\sigma_p - [\vec{\omega}_{\vec{l}_{i_1}} + \dots + \vec{\omega}_{\vec{l}_{i_p}}] - [\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m]}
 \end{aligned}$$

et le premier terme de Φ II' s'écrit finalement

$$\frac{\lambda^2 p!}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\epsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_p) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+p}) \times \right. \\ \left. \times P(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_p, \dots, \vec{l}_{n+p}) \right) \int d\vec{k} \frac{f^2(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_1} + \dots + \omega_{\vec{l}_p}] - [\omega_{\vec{k}} + \Delta m]}$$

Le second terme de Φ II' s'écrit en intervertissant l'ordre des sommations sur $\vec{\lambda}$ et $\vec{x}'$

$$\frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\epsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}}' \sum_{\vec{x}'}^{p+1} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{i_1} \dots d\vec{l}_{n+p+1} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{n+p+1}) \right. \\ \left. \times P(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{n+p+1}) \right) \int d\vec{l}_{i_2} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_2}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_2}}}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_1} + \dots + \omega_{\vec{l}_{i_1}}] - \Delta m} \sum_{i_2 \neq i_1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_2}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_2}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i_2}, \dots, \vec{l}_{i_1})$$

Si dans le coefficient de

$$\frac{\lambda^2 p!}{(n+p+1)\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\epsilon}$$

nous faisons les transformations $\vec{l}_{i_{p+1}} \rightarrow \vec{l}_{i_2}$, $\vec{l}_{n+p+1} \rightarrow \vec{l}_{i_{p+1}}$, $\vec{l}_{i_2} \rightarrow \vec{k}$,

nous obtenons $\frac{(n+p+1)!}{n! p!}$ fois l'intégrale

$$\int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+p}) P(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_2}, \dots, \vec{l}_{i_{p+1}}) \times$$

$$\int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_1} + \dots + \omega_{\vec{l}_{i_1}}] - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m)} \sum_{i_1}^p \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_1}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{i_1}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{k}, \vec{l}_{i_2}, \dots, \vec{l}_{i_p})$$

En introduisant $\sum_{\{i_1 \dots i_p\}}'$, le second terme de Φ II' s'écrit

$$\frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{x}_i}) + i\epsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+p}) P(\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_p}, \dots, \vec{l}_{n+p}) \right)$$

$$\int d\vec{k} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sigma_p - [\vec{\omega}_{\vec{k}_1} + \dots + \vec{\omega}_{\vec{k}_p}] - [\vec{\omega}_{\vec{k}} + \Delta m]} \sum_{i=1}^p \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \varphi(\sigma_p, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_i, \dots, \vec{k}_p)$$

Après des manipulations analogues, on obtient pour le troisième terme Φ II'

$$\begin{aligned} & \frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{k}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{l}_{n+1}, \dots, \vec{l}_{n+p}) \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \times \right. \\ & \cdot \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_p}, \vec{l}_{i_{p+1}}) \left(d\vec{k} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sigma_p - [\vec{\omega}_{\vec{k}_1} + \dots + \vec{\omega}_{\vec{k}_{i_{p+1}}}] - \Delta m} P\left(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{x}_{i_{p+1}}}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{x}_{n+p}} \right) \right) \\ & \Phi_{II}' = \frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{k}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{l}_{n+1}, \dots, \vec{l}_{n+p}) \times \right. \\ & \times \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_p}) P\left(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{i_p}}{\vec{x}_{i_p}}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{x}_{n+p}} \right) [\sigma_p - \sum_{i=1}^p \omega_{\vec{k}_i} - \Delta m_v] \\ & + \frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{k}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{l}_{n+1}, \dots, \vec{l}_{n+p}) \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \times \right. \\ & \times \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_p}, \vec{l}_{i_{p+1}}) \frac{1}{\sigma_p - [\vec{\omega}_{\vec{k}_1} + \dots + \vec{\omega}_{\vec{k}_{i_{p+1}}}] - \Delta m} \left(d\vec{k} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P\left(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{x}_{i_{p+1}}}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p}}{\vec{x}_{n+p}} \right) \right) \end{aligned}$$

obtenu après utilisation de l'équation intégrale (97) et la décomposition (c) de cet appendice.

Calcul de Φ II'' .

$$\begin{aligned} \Phi_{II}'' &= - \frac{\lambda^2 p!}{\sqrt{n!}(n+p+1)} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{k}_i}) + i\varepsilon} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{k}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f^2(\vec{\omega}_{\vec{k}_i})}{2\omega_{\vec{k}_i}} \right. \\ & \times \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_p}, \vec{l}_{i_{p+1}}) P\left(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{x}_{i_{p+1}}}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{x}_{n+p+1}} \right) \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{l}_{n+1}, \dots, \vec{l}_{n+p+1}) \\ & - \frac{\lambda^2 p!}{\sqrt{n!}(n+p+1)} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{k}_i} - \omega_{\vec{k}_i}) + i\varepsilon} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{k}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{k}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \right. \\ & \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i}}} \varphi^*(\sigma_p, \vec{l}_{i_1}, \dots, \vec{l}_{i_p}, \vec{l}_{i_{p+1}}) P\left(\frac{\vec{l}_1}{\vec{x}_1}, \dots, \frac{\vec{l}_{i_{p+1}}}{\vec{x}_{i_{p+1}}}, \dots, \frac{\vec{l}_{n+p+1}}{\vec{x}_{n+p+1}} \right) \times \\ & \sum_{j' \neq i_{p+1}} \frac{f(\vec{\omega}_{\vec{k}_{j'}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_{j'}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n, \vec{l}_{n+1}, \dots, \vec{l}_{n+p+1}) \end{aligned}$$

Le premier terme de Φ II"

$$-\frac{\lambda^2 P!}{\sqrt{n!}(n+p+1)} \frac{1}{\sum_{i_1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{\tau_1}^{p+1} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{i_\tau} \dots d\vec{l}_{n+p+1} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \right. \\ \left. \varphi'(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{n+p+1}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}} \dots \vec{l}_{n+p+1}) \right) \int d\vec{l}_{i_\tau} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_\tau}})}{2\omega_{\vec{l}_{i_\tau}}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i_1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon}$$

Après les transformations $\vec{l}_{i_\tau} \rightarrow \vec{k}$, $\vec{l}_{i_{p+1}} \rightarrow \vec{l}_{i_\tau}$, $\vec{l}_{n+p+1} \rightarrow \vec{l}_{p+1}$ devient

$$-\frac{P!}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^2}{\sum_{i_1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) \varphi'(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p}) \times \right. \\ \left. P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right) \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i_1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{l}_j} - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon}$$

Le second terme de Φ II"

$$-\frac{\lambda^2 P!}{\sqrt{n!}(n+p+1)} \frac{1}{\sum_{i_1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}} \sum_{\tau_1}^{p+1} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{i_\tau} \dots d\vec{l}_{n+p+1} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{i_{p+1}}) \right) \times \\ \times P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_{p+1}} \dots \vec{l}_{n+p+1}) \int d\vec{l}_{i_\tau} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{i_\tau}})}{2\omega_{\vec{l}_{i_\tau}}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i_1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p+1} \omega_{\vec{l}_j} - \Delta m + i\varepsilon} \times \\ \sum_{j \neq i_\tau} \frac{f(\omega_{\vec{l}_j})}{2\omega_{\vec{l}_j}} \varphi'(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_\tau} \dots \vec{l}_{n+p+1})$$

donne après les transformations $\vec{l}_{i_\tau} \rightarrow \vec{k}$, $\vec{l}_{i_{p+1}} \rightarrow \vec{l}_{i_\tau}$, $\vec{l}_{n+p+1} \rightarrow \vec{l}_{i_{p+1}}$

$$-\frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon \{i_1, \dots, i_p\}} \sum' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p})}^* P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right. \\ \left. \times \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{g}_j} - (\omega_{\vec{k}} + \Delta m) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^{n+p} \frac{f(\omega_{\vec{l}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_i}}} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i-1} \dots \vec{l}_{i+1} \dots \vec{l}_{n+p})} \right)$$

En utilisant l'équation (a) puis la décomposition (c) de cet appendice

$$\Phi_{II}'' = -\frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon \{i_1, \dots, i_p\}} \sum' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p})}^* \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p})} \right. \\ \left. \times [\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{g}_j} - \Delta m] P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right) \\ + \frac{(p!)^2}{(n+p)! n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon \{i_1, \dots, i_p\}} \sum' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p})}^* P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right. \\ \left. \times \sum'_{\{i'_1, \dots, i'_{p+1}\}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{e}_{i'_1}} + \dots + \omega_{\vec{e}_{i'_{p+1}}}] - \Delta m} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{e}_{i'_i}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_{i'_i}}}} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i'_1} \dots \vec{l}_{i'_i} \dots \vec{l}_{i'_{p+1}})} \right. \\ \left. \times \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p} \vec{l}) \right)$$

D'où $\Phi_{II} = \Phi_{II'} + \Phi_{II}''$

$$\Phi_{II} = -\frac{p!}{\sqrt{n!}} \sum'_{\{i_1, \dots, i_p\}} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p})} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p})}^* P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right) \\ + \frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon \{i_1, \dots, i_p\}} \sum' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p})} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{e}_{i'_i}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{e}_{i'_i}}}} \right. \\ \left. \times \varphi_{(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i'_1} \dots \vec{l}_{i'_i} \dots \vec{l}_{i'_{p+1}})}^* \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{e}_{i'_1}} + \dots + \omega_{\vec{e}_{i'_{p+1}}}] - \Delta m} \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p} \vec{l}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(p!)^2}{(n+p)! n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \left(d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p}) P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p} \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \right. \\
 & \times \sum_{\{i'_1 \dots i'_{p+1}\}}' \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{\lambda}_{i'_1}} + \dots + \omega_{\vec{\lambda}_{i'_{p+1}}}] - \Delta m} \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_{i'_z}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_{i'_z}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p} \dots \vec{\lambda}_{i'_{p+1}}) \times \\
 & \times \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i'_{p+1}} \dots \vec{\lambda}_{n+p} \vec{k})
 \end{aligned}$$

et l'expression correspondante de Φ III obtenue en tenant compte de la remarque (1).

Enfin un calcul analogue nous permet d'écrire

$$\Phi_{IV} = \Phi_{IV'} + \Phi_{IV''} \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{IV'} &= \frac{(n+p)!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \varphi(\sigma_p, \vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \times \\
 & \times [\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\chi}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \Delta m_v]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}}' \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{\lambda}_{i_1}} + \dots + \omega_{\vec{\lambda}_{i_{p+1}}}] - \Delta m} \times \\
 & \times \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_{i'_z}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_{i'_z}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p} \dots \vec{\lambda}_{i'_{p+1}}) \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i'_{p+1}} \dots \vec{\lambda}_{n+p} \vec{k})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{IV''} &= - \frac{(n+p)!}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \times \\
 & \times [\sigma_p + \sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{\lambda}_j} - \Delta m_v)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{p!}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p} \varphi(\sigma_p, \vec{\chi}_1 \dots \vec{\chi}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{n+p}) \sum_{\{i_1 \dots i_{p+1}\}}' \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{\lambda}_{i_1}} + \dots + \omega_{\vec{\lambda}_{i_{p+1}}}] - \Delta m} \times \\
 & \times \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_{i'_z}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_{i'_z}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p} \dots \vec{\lambda}_{i'_{p+1}}) \lambda^2 \int d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i'_{p+1}} \dots \vec{\lambda}_{n+p} \vec{k})
 \end{aligned}$$

Remarquons que Φ IV" s'obtient à partir de Φ IV' en prenant le conjugué de Φ IV' et en y faisant les transformations $\vec{\lambda}_i \rightarrow \vec{\lambda}_i, \vec{\lambda}_i \rightarrow \vec{\lambda}_i$

Le premier terme de Φ IV' se groupe avec le premier terme de Φ IV" pour donner $-\varphi^5$

En sommant le terme restant de Φ IV', Φ II et φ^5 il vient

$$R_1 = \frac{(p!)^2}{(n+p)!n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i^*}) + i\varepsilon} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{m+p} \varphi(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{m+p}) \right) \times \\ \times \sum_{\{j_1 \dots j_{p+1}\}}' \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{l}_{j_{p+1}}}] - \Delta m} \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_z}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_z}}}} \varphi(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_z} \dots \vec{l}_{j_{p+1}}) \times \\ \times \lambda^2 \left(d\vec{k} \frac{f(\omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_{p+1}} \dots \vec{l}_{m+p} \vec{k}) \right)$$

qui après transformation de $\vec{k} \rightarrow \vec{l}_{m+p+1}$ et symétrisation peut encore s'écrire

$$R_1 = \frac{(p!)^2}{(n+p+1)!n!} \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i^*}) + i\varepsilon} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{m+p+1} \sum_{z=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_z})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_z}}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}}' \varphi(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) \times \right. \\ \times P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{i_{p+1}} \dots \vec{l}_{m+p+1}) \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_{p+1}\} \\ j_1 \dots j_{p+1} \neq i}}' \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{l}_{j_{p+1}}}] - \Delta m} \\ \left. \times \sum_{z=1}^{p+1} \frac{f(\omega_{\vec{l}_{j_z}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{l}_{j_z}}}} \varphi(\vec{\sigma}_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_z} \dots \vec{l}_{j_{p+1}}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_{p+1}} \dots \vec{l}_{m+p+1}) \right)$$

De même d'après les remarques faites, en groupant le terme restant de Φ IV", Φ III et φ^4 , on obtient le terme R_2 qui s'exprime à partir de R_1 en prenant le conjugué de R_1 , puis en y faisant les transformations $\vec{\lambda}_i \rightarrow \vec{\lambda}_i, \vec{\lambda}_i \rightarrow \vec{\lambda}_i$ ($i = 1, 2 \dots n$).

R_1 se groupe avec $\Phi I''$ pour donner

$$R_1 + \Phi I'' = - \frac{(p!)^2}{(n+p+1)! n!} \cdot \frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \times$$

$$\times \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p+1} \sum_{i=1}^{n+p+1} \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}}' \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p}) P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{\chi}_1} \dots \frac{\vec{\lambda}_{i_1}}{\vec{\chi}_{i_1}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{i_p}}{\vec{\chi}_{i_p}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{n+p+1}}{\vec{\chi}_n}) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ \{j_1 \dots j_p\} \neq \{i_1 \dots i_p\}}} \left[\frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{j_1} \dots \vec{\lambda}_{j_p}) + \sum_{\alpha=1}^p \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_{j_\alpha}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_{j_\alpha}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{j_1} \dots \vec{\lambda}_{j_{\alpha-1}} \vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_{j_{\alpha+1}} \dots \vec{\lambda}_{j_p}) \right] \times$$

$$\times \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{\lambda}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{\lambda}_{j_p}}] - [\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m]} P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{\chi}_1} \dots \frac{\vec{\lambda}_{j_1}}{\vec{\chi}_{j_1}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{j_p}}{\vec{\chi}_{j_p}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{n+p+1}}{\vec{\chi}_n})$$

$$= - \frac{(p!)^2}{(n+p+1)! n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^{n+p+1} \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p+1} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}}' \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p}) \times$$

$$\times P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{\chi}_1} \dots \frac{\vec{\lambda}_{i_1}}{\vec{\chi}_{i_1}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{i_p}}{\vec{\chi}_{i_p}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{n+p+1}}{\vec{\chi}_n}) \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ \{j_1 \dots j_p\} \neq \{i_1 \dots i_p\} \\ j_1 \dots j_p \neq i}}' \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{j_1} \dots \vec{\lambda}_{j_p}) P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{\chi}_1} \dots \frac{\vec{\lambda}_{j_1}}{\vec{\chi}_{j_1}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{j_p}}{\vec{\chi}_{j_p}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{n+p+1}}{\vec{\chi}_n}) \times$$

$$\times \lambda^2 \int d\vec{\lambda}_i \frac{f^2(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{2\omega_{\vec{\lambda}_i}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{\lambda}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{\lambda}_{j_p}}] - [\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m]}$$

$$- \frac{(p!)^2}{(n+p+1)! n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\chi}_i}) + i\varepsilon} \sum_{i=1}^{n+p+1} \int d\vec{\lambda}_1 \dots d\vec{\lambda}_{n+p+1} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ i_1 \dots i_p \neq i}}' \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{i_1} \dots \vec{\lambda}_{i_p}) \times$$

$$\times P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{\chi}_1} \dots \frac{\vec{\lambda}_{i_1}}{\vec{\chi}_{i_1}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{i_p}}{\vec{\chi}_{i_p}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{n+p+1}}{\vec{\chi}_n}) \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ \{j_1 \dots j_p\} \neq \{i_1 \dots i_p\} \\ j_1 \dots j_p \neq i}}' P(\frac{\vec{\lambda}_1}{\vec{\chi}_1} \dots \frac{\vec{\lambda}_{j_1}}{\vec{\chi}_{j_1}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{j_p}}{\vec{\chi}_{j_p}} \dots \frac{\vec{\lambda}_{n+p+1}}{\vec{\chi}_n}) \times$$

$$\times \lambda^2 \int d\vec{\lambda}_i \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_i})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_i}}} \frac{1}{\sigma_p - [\omega_{\vec{\lambda}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{\lambda}_{j_p}}] - [\omega_{\vec{\lambda}_i} + \Delta m]} \sum_{\alpha=1}^p \frac{f(\omega_{\vec{\lambda}_{j_\alpha}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{\lambda}_{j_\alpha}}}} \varphi(\sigma_p, \vec{\lambda}_{j_1} \dots \vec{\lambda}_{j_{\alpha-1}} \vec{\lambda}_i \vec{\lambda}_{j_{\alpha+1}} \dots \vec{\lambda}_{j_p})$$

qui après les transformations de $\vec{l}_i \rightarrow \vec{k}$, $\vec{l}_{n+p+1} \rightarrow \vec{l}_i$, et l'utilisation de l'équation intégrale (97) cas $i = p$, donne

$$R_1 + \Phi I'' =$$

$$-\frac{(p!)^2}{(n+p)!n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) + i\varepsilon} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ \{j_1 \dots j_p\} \neq \{i_1 \dots i_p\}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p} \dots \vec{l}_{n+p}) [\sigma_p - [\omega_{\vec{l}_{j_1}} + \dots + \omega_{\vec{l}_{j_p}}] - \delta m_v]$$

qui peut encore s'écrire en tenant compte du second permanent

$$R_1 + \Phi I'' =$$

$$-\frac{(p!)^2}{(n+p)!n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) + i\varepsilon} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \sum_{\{i_1 \dots i_p\}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\{j_1 \dots j_p\} \\ \{j_1 \dots j_p\} \neq \{i_1 \dots i_p\}}} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \left[\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{l}_j} - \delta m_v \right]$$

D'où il résulte immédiatement des remarques précédentes

$$R_2 + \Phi I' =$$

$$\frac{(p!)^2}{(n+p)!n!} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\omega_{\vec{\lambda}_i} - \omega_{\vec{\lambda}_i}) + i\varepsilon} \left(d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_p\} \\ \{i_1 \dots i_p\} \neq \{j_1 \dots j_p\}}} \sum_{\{j_1 \dots j_p\}}' \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{i_1} \dots \vec{l}_{i_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \right) \times$$

$$\times \varphi(\sigma_p, \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p}) P(\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{j_1} \dots \vec{l}_{j_p} \dots \vec{l}_{n+p}) \left[\sigma_p + \sum_{i=1}^n \omega_{\vec{\lambda}_i} - \sum_{j=1}^{n+p} \omega_{\vec{l}_j} - \delta m_v \right]$$

$$\text{et } R_1 + \phi I'' + R_2 + \phi I' + \varphi^2 = 0$$

Finalement nous obtenons

$$\begin{aligned} & (n+p)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p} \overline{\varphi}(\sigma_p, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p}) \overline{\varphi}(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p}) + \\ & + \lambda^2 (n+p+1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{n+p+1} \overline{\varphi}(\sigma_p, \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p+1}) \overline{\varphi}(\sigma_p, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n+p+1}) = \\ & = \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) \left[p! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_p \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_p) \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_p) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda^2 (p+1)! \int d\vec{l}_1 \dots d\vec{l}_{p+1} \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{p+1}) \varphi(\sigma_p, \vec{l}_1 \dots \vec{l}_{p+1}) \right] = \\ & = \frac{1}{n!} P(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n, \vec{\lambda}_1 \dots \vec{\lambda}_n) \quad \text{puisque l'état discret d'énergie } \sigma_p \\ & \text{est normé et (d) est ainsi vérifié.} \end{aligned}$$

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

" La nouvelle théorie des particules de M. Vigier
et de ses collaborateurs" .

Vu et approuvé :

Paris, le 5 Juin 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permisi d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris

Jean ROCHE

